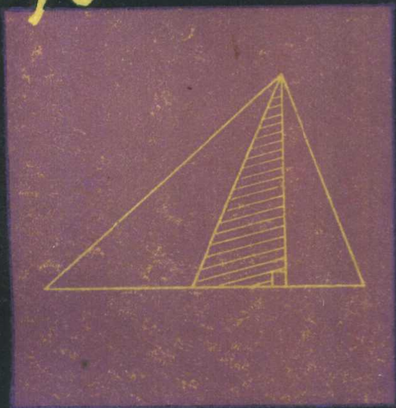
初中几何基础辅导



CHUZHONG JIHE

江苏科学技术出版社

初中几何基础辅导

杨浩清　金炳麟
杨裕前　郑金锡　编

江苏科学技术出版社
1983.9.

初中几何基础辅导

杨浩清 金炳麟
杨裕前 郑金锡 编

出版：江苏科学技术出版社

发行：江 苏 省 新 华 书 店

印刷：南 京 人 民 印 刷 厂

开本787×1092毫米 1/32 印张 8.875 字数 196,000

1983年11月第1版 1983年11月第1次印刷

印数 1—101,000册

书号：7196·014 定价：0.75元

责任编辑 沈绍绪

前　　言

本书根据现行《中学数学教学大纲》和通用教材编写而成，较详细地介绍了初中几何基础知识，内容系统完整，重点突出。编写中着眼于讲清基本概念，所举范例力求典型、新颖，对难度稍大的范例，则作了详细的分析和说明。书中对各类题目的解题方法，均作了必要的分类和归纳。为培养读者的解题能力，帮助读者加深理解基础知识，掌握必要的解题技巧，在附录中还选录了尺规作图、综合题选解、直线和圆的方程的内容略作介绍，供读者参考。

本书可供在校初中学生和正在补习初中几何的在职职工阅读，也可供中学数学教师参考。

在编写过程中，得到了常州市教育局教研室的大力支持。江苏省教育厅教研室万庆炎同志审阅了全书，毛震球、钱惠民同志对本书提出了修改意见，在此，一并表示感谢。

由于水平有限，谬误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1983.2.

目　　录

第一章 直线、相交线和平行线

基 础 知 识

一、直线

1． 线段、射线、直线

（1） 线段 用直尺把两点连结起来，就得到一条线段。这两点叫做线段的端点。每一条线段都有确定的长度。

（2） 射线 线段向一方无限延伸，就形成射线。射线只有一个端点。没有固定的长度。

（3） 直线 线段向两方无限延伸，就形成直线。直线没有端点，没有固定的长度。

2． 直线的性质

（1） 经过任意两点有一条直线，并且只有一条直线。也就是：两点决定一条直线。

（2） 两条不相重合的直线至多有一个交点。

3． 线段的基本性质

在所有连结两点的线中，线段最短。

连结两点的线段的长度，叫做这两点间的距离。

二、角

1． 定义

（1） 从一点引出的两条射线所组成的图形叫做角，这个点叫做角的顶点，这两条射线都叫做角的边。

（2） 角也可以看作平面内一条射线由原来的位置，绕着它的端点旋转到另一位置所成的图形．旋转开始时的射线叫做角的始边，旋转终止时的射线叫做角的终边．

2． 角的分类

（1） 平角 射线绕端点旋转半周，终边和始边成一直线时所成的角叫做平角．

（2） 周角 射线绕端点旋转一周，终边和始边重合时所成的角叫做周角．

（3） 直角 平角的一半叫做直角（$Rt\angle$）．

（4） 锐角 小于直角的角叫做锐角．

（5） 钝角 大于直角而小于平角的角叫做钝角．

3． 角的度量

（1） 度量角的单位是度（°）、分（′）、秒（″）．把一个周角分成360等份，每一份是1度；把1度分成60等份，每一份是1分；把1分分成60等份，每一份是1秒．

（2） 进制 角的度量单位度和分、分和秒之间都是60进制的．

$$1^\circ=60', \qquad 1'=60''.$$

$$1'=\left(\frac{1}{60}\right)^\circ, \qquad 1''=\left(\frac{1}{60}\right)'.$$

4． 相关的角

（1） 互为余角 两个角的和等于90°时，这两个角叫做互为余角．

（2） 互为补角 两个角的和等于180°时，这两个角叫做互为补角．

（3） 相邻的角 有公共顶点和公共边，并且内部不互

相重叠的两个角叫做相邻的角，相邻的角又互为补角时叫做邻补角。

（4） 对顶角 一个角的两条边分别是另一个角的两条边的反向延长线，这两个角叫做对顶角。

角的平分线 从一个角的顶点出发的一条射线，如果把这个角分成两个相等的角，这条射线叫做这个角的平分线。每个角必有一条平分线，而且只有一条平分线。

（5） 三线八角 如图1－1所示，两条直线 AB 和 CD 被直线 EF 所截，形成八个角：其中∠1和∠5，∠2和∠6，∠3和∠7，∠4和∠8分别叫做同位角；∠3和∠5，∠4和∠6分别叫做内错角；∠3和∠6，∠4和∠5分别叫做同旁内角。

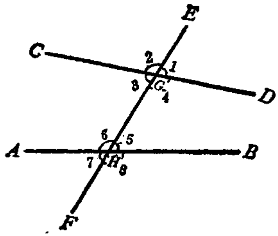


图 1-1

相关的角具有如下性质：

（1） 对顶角相等；

（2） 同(等)角的余角相等；

（3） 同(等)角的补角相等；

（4） 和(邻)补角相等的角是直角。

三、垂线和斜线

1. 定义

两条直线相交成直角时，这两条直线间的位置关系叫做互相垂直，其中一条叫做另一条的垂线，它们的交点叫做垂足。

两条直线相交不成直角时，其中一条叫做另一条的斜线。

2. 垂线的性质

(1) 经过直线上（或者直线外）的一点，有且只有一条直线垂直于已知直线。

(2) 连结直线外一点和这条直线上的各点的所有线段中，和这条直线垂直的线段最短。这条垂直线段的长（该点与垂足的距离），叫做点到直线的距离。

3. 线段的垂直平分线

(1) 线段的中点　线段上分线段成两条相等线段的点叫做这条线段的中点。一条线段有唯一的一个中点，如图1－2，点M是线段AB的中点，有

$$AM = MB = \frac{1}{2}AB,$$

$$AB = 2AM = 2MB.$$

(2) 线段的垂直平分线　垂直于一条线段并且平分这条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线。

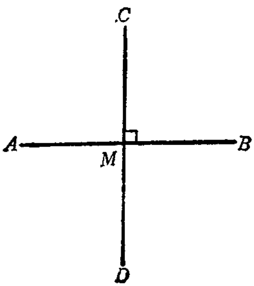


图 1-2

四、平行线

1. 定义

在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线。

2. 平行公理

过直线外一点，能且只能引一条直线和这条直线平行。

3. 平行线的判定

(1) 两条直线被第三条直线所截，

$$\text{如果有一对}\left\{\begin{array}{l}\text{同位角相等,}\\ \text{内错角相等,}\\ \text{同旁内角互补,}\end{array}\right\}\text{那么这两条直线平行.}$$

（2） 垂直于同一条直线的两条直线平行.

（3） 平行于同一条直线的两条直线平行.

4． 平行线的性质

（1） 如果两条平行直线被第三条直线所截,

$$\text{那么}\left\{\begin{array}{l}\text{同位角相等,}\\ \text{内错角相等,}\\ \text{同旁内角互补.}\end{array}\right.$$

（2） 如果一条直线垂直于两平行线中的一条直线，那么这条直线必垂直于另一条直线.

（3） 两条平行线间的距离　从两条平行线中的一条上任意一点,向另一条引垂线,这点到垂足之间线段的长，叫做平行线间的距离.

两条平行线间的距离处处相等.

五、定义和命题

1． 定义的概念

对一个名词或术语的意义的规定，就是这个名词或术语的定义.

定义成立,有两个条件:

（1） 不自相矛盾,规定意义才能存在;

（2） 充足,则规定的事物才是唯一的.

定义是判断的一种根据.

2． 命题的概念

判断一件事理的语句叫做命题.

（1） 每个命题都可以分为题设和结论两部分：题设是

已知事项，结论是由题设推出的事项。

（2） 命题有真有假，正确的命题叫做真命题，错误的命题叫做假命题。

（3） 公理和定理都是命题，而且是真命题。

3． 公理

（1） 人们经过长期实践证实了的符合客观实际的命题叫做公理。

（2） 等量公理和不等量公理

等量公理：

1） 等量加等量，和相等；

2） 等量减等量，差相等；

3） 等量的同倍量相等；

4） 等量的同分量相等；

5） 在等式或不等式中，一个量可以用它的等量来代替（等量代换）；

6） 全量等于各分量之和。

不等量公理：

1） 不等量加上或者减去等量，原来大的仍大；

2） 不等量乘以或者除以同一个正数，原来大的仍大；

3） 不等量加不等量，大量的和大于小量的和；

4） 等量减不等量，减去大的，差反而小；

5） 第一量大于第二量，第二量大于第三量，则第一量大于第三量；

6） 全量大于它的任一部分量。

4． 定理

（1） 用推理的方法证明是正确的命题叫做定理。

（2） 定理的题设叫做“已知的条件”，结论叫做“求证的

结论”。如果用A表示定理的条件，用B表示结论，那么这个定理的结构可用

$$A \Rightarrow B$$

来表示，所有的定理都可以写成“如果…，那么….”的形式。

（3） 定理的证明

1） 证明一个定理，就是从定理的条件出发，根据已经学过的定义、公理和已经证明过的定理，推导出定理的结论。

2） 证明定理的步骤：

第一步 根据题意，画出图形；

第二步 写出已知的条件和求证的结论；

第三步 通过思考、分析，寻求推理的途径（不必写出来）；

第四步 写出证明的过程。

5． 命题的四种形式

逆命题 把一个命题的条件和结论互相交换，所得的命题叫做原命题的逆命题。

否命题 把一个命题的条件和结论分别加以否定，所得的命题叫做原命题的否命题。

逆否命题 把一个命题的条件和结论互换后，再分别加以否定，所得的命题叫做原命题的逆否命题。

如果用A和B分别表示原命题的条件和结论，用$\overline{A}$和$\overline{B}$分别表示A和B的否定，四种命题的形式就是：

原命题	$A \Rightarrow B$；
逆命题	$B \Rightarrow A$；
否命题	$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$；
逆否命题	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$。

原命题、逆命题、否命题和逆否命题这四个命题间的关系

如图1-3

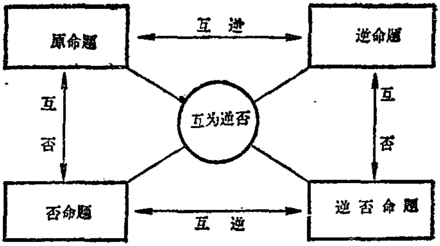


图 1-3

6. 命题的等效关系

（1） 互为逆否的两个命题是等效命题（真则同真，假则同假），原命题⇐⇒逆否命题.

（2） 互逆或互否的两个命题不一定等效，即从原命题的正确性不能推出其逆命题或否命题的正确性.

（3） 如果互逆或互否的两个命题同真，那么四个命题都真.

7. 作图题

预先给出一些条件，而后求作具备这些条件的图形，这类问题叫做作图题.对某作图题完成了作图之后，我们便可以断定合乎某某条件的图形是存在的，因此，作图题实质上是关于图形存在性命题的一种变形.

（1） 尺规的用法

1） 连结两个已知点间的线段；

2） 延长已知的线段或射线；

3） 已知圆心和半径，作圆或弧；

4） 确定两个已知点间的距离；

5） 从已知直线上截取定长的线段.

（2） 基本作图 任何几何作图问题都是由有限个基本作图组成的．在应用这些基本作图时，通常只叙述其条件和结论，而不再说明作图的步骤和方法．这些基本作图，相当于几何证明中的定理．

常用的基本作图有：

1） 作线段等于已知线段（图 1－4）；

图 1-4

2） 作一个角等于已知角（图 1－5）；

图 1-5

3） 作已知角的平分线（图 1－6）；

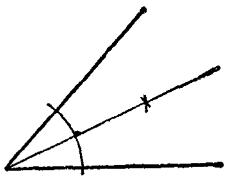


图 1-6

4） 过已知点作已知直线的垂线（分过直线上一点和直线外一点两种情况）（图 1－7）；

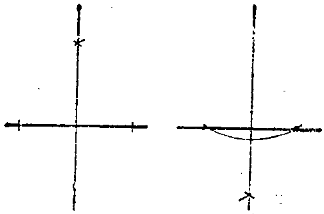


图 1-7

5）　作已知线段的垂直平分线（图 1－8）；

6）　过已知直线外一个已知点作此直线的平行线（图 1－9）。

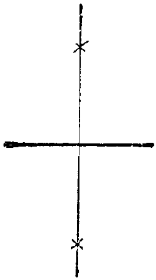


图 1-8

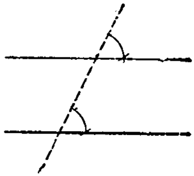


图 1-9

范　　例

例 1　如果 MN 和 MP 是同一直线上的两条线段，N 点在线段 MP 上，$MN = 10\text{cm}$，$MP = 16\text{cm}$。A、B 分别是 MN、MP 的中点，求 AB 的长。

已知　N 在线段 MP 上，A 是 MN 的中点，B 是 MP 的中点，$MN = 10\text{cm}$，$MP = 16\text{cm}$（图 1－10）。求 AB 的长。

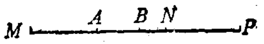


图 1-10

解 ∵ A是MN的中点，B是MP的中点，

∴ $MA=NA=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}\times 10=5$，

$$MB=PB=\frac{1}{2}MP=\frac{1}{2}\times 16=8.$$

∴ $AB=MB-MA=8-5=3(\text{cm})$.

答 线段AB长3cm.

说明 （1） 几何计算题应包括已知、求、解和答四个步骤.

（2） 本题应用了线段的和差关系与线段的中点概念进行推理和计算.

例2 已知 M是线段AB的中点，P在MB上（图1-11）.

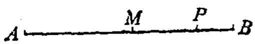


图 1-11

求证 （1） $MP=\frac{1}{2}(AP-BP)$；

（2） $AP^2-BP^2=2AB\cdot MP$.

证明 （1） ∵ M是AB的中点，

∴ $AM=BM=\frac{1}{2}AB$.

$$AP = AM + MP = BM + MP$$
$$= (MP + BP) + MP,$$

$\therefore$ $2MP + BP = AP$，即 $2MP = AP - BP$，

$\therefore$ $MP = \frac{1}{2}(AP - BP)$.

（2） $\because$ $AP^2 - BP^2 = (AP + BP)(AP - BP)$，

$\therefore$ $AP^2 - BP^2 = AB \cdot 2MP$

即 $AP^2 - BP^2 = 2AB \cdot MP$.

例3 在图1-12中，$\angle AOB = 168°$，$\angle AOC = \angle BOD = 90°$。

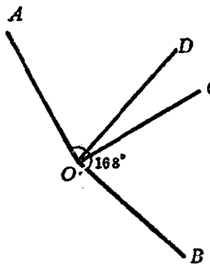


图 1-12

求 $\angle DOC$的大小。

解 $\because$ $\angle AOD + \angle DOC = \angle AOC = 90°$，

$\angle BOC + \angle DOC = \angle BOD = 90°$，

$\therefore$ $\angle AOD + \angle BOC + 2\angle DOC = 180°$ ①

又 $\angle AOD + \angle DOC + \angle BOC = \angle AOB = 168°$ ②

① - ②，得 $\angle DOC = 12°$

答 $\angle DOC$为12°。