中学生数学
课外读物

最大值和最小值

谷超豪

上海教育出版社

中学生数学課外讀物

最大值和最小值

谷超豪

內容提要

本书結合一些实际問題介紹了若干解极値問題的方法．其中有的蘊含着綫性規划和微分学的最初步的思想，也有一些物理模拟的方法．

本书可以使讀者进一步了解数学知識在生产实际中的应用，并有助于提高讀者活学活用数学知識的能力．可供高中二、三年級学生閱讀．

中学生数学課外讀物

最大値和最小値

谷超豪

*

上海教育出版社出版

（上海永福路123号）

上海市书刊出版业营业許可証出090号

上海新华印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

*

开本：787×1092 1/32　印張：1 5/16　字数：27,000

1965年1月第1版　1965年1月第1次印刷

印数：1—95,000本

統一书号：7150・1620

定　　价：(七) 0.12元

編輯說明

数学,在中学里是一門基本工具学科,通过这一学科的教学,必須使中学生掌握数学这个工具,为他們参加生产劳动和进一步学习打下扎实的基础. 为了使中学生学好数学, 除了必須用最大的努力提高教学质量以外,还需要各方面的配合. 我們編輯这套"中学生数学課外讀物",目的就在于配合教学,使中学生更好地掌握基础知識,进一步提高基本技能,同时扩大他們的眼界,培养他們对数学的爱好,以帮助他們适应参加生产劳动和进一步学习的需要.

这套讀物的內容主要包括下列两个方面: 一、就中学数学課程中的一些問題, 介紹为深透理解这些問題所需要的基础知識,并提供一些必要的习题,以加强基本訓练和提高运用知識解決实际問題的能力; 二、就一些与中学数学有关的专题,介紹数学方法,邏輯知識,数学某些分支的概况,数学史方面的知識,等等.

这套讀物的編写还是一种新的尝試. 无論在选题、要求、內容、体裁等方面是否能适合中学生的需要,希望教育工作者和讀者对我們提出宝貴的意見, 同时还希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学課外讀物, 帮助我們做好这套讀物的編輯工作.

中学生数学課外讀物編审委員会

1963 年 8 月

目　　录

前　言

在这本小册子里我們将要討論一些函数的最大值和最小值的問題．这样的問題簡称为函数的极值問題．它在工农业生产中有广泛的应用．例如，在制訂生产計划的时候，要考虑怎样合理地安排劳动力，才能使劳动生产率最高；在調运物資的时候，要考虑怎样制訂一个合理的方案，才能使运輸的費用最省；成品的設計要考虑到怎样才能使所用的材料最省等，要解决这些問題往往都可以归結到求函数的极值的問題．

在代数里，我們已經知道了一些应用不等式求函数的最大值和最小值的方法，也初步知道一些有关应用的实例．但是，应用不等式来解函数的极值問題有一定的局限性的；有些問題应用其他方法来解比較簡便，也有更多的問題是必須应用其他方法来解的．

在这本小册子里，我們将尽可能地結合一些实际問題，来介紹解函数的极值問題的一些有效的方法．这些方法大致可以分为三类：第一类是应用綫性代数方程組的知識来求解的方法．这里，我們已經让讀者接触到綫性規划的最初步的原理．第二类是数学分析的方法．这里，通过极值問題的分析，我們介紹了微分学里一些最基本的內容，并且举例說明了某些应用．第三类是几何的方法和物理的方法．在这里我們指出，适当地应用几何学和物理学，可以用比較簡捷的方法来解决某些看来是相当困难的問題．

一　从两个例子談起

我們先来考察这样的一个問題：

一个国营农場新开垦了50亩土地．現在安排20个劳动力来耕种这些土地．这些地可以种蔬菜、种棉花或者种水稻．如果种这些农作物每亩地所需要的劳动力和預計的产值是：

	每亩地所需要的劳动力	每亩地預計的产值
蔬菜	$\frac{1}{2}$	110 元
棉花	$\frac{1}{3}$	75 元
水稻	$\frac{1}{4}$	60 元

怎样作出具体安排，制訂一个生产計划，才能使得每亩地都种上作物，所有的劳动力都有工作，而且农作物的預計的总产值达到最高？

这个問題就是要确定在这50亩地里，蔬菜、棉花、水稻各种多少亩．所以，这里有三个未知数．按照我們在代数里学到的办法，用x代表种蔬菜的亩数，y代表种棉花的亩数，z代表种水稻的亩数，那末，根据已知条件，可以得到等式：

$$x+y+z=50; \tag{1}$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=20. \tag{2}$$

幷且x、y、z的值必須适合于下列不等式：

$$x \geqq 0; \tag{3}$$

$$y \geqq 0; \tag{4}$$

$$z \geqq 0. \tag{5}$$

另外，如果設总的产值是 w 元，那末

$$w = 110x + 75y + 60z. \tag{6}$$

这样，上面这个問題就归結为，求适合于綫性方程(1)、(2)和不等式(3)、(4)、(5)的 x、y、z 的值，并且要使含有 x、y、z 的一次函数 $w = 110x + 75y + 60z$ 的值为最大．这个問題和一般的代数方程不同，它是一个在一定的条件下，求某一个一次函数的最大值的問題．

为了解这个問題，我們可以先利用消元法来减少未知数的个数．

把(2)变形为

$$6x + 4y + 3z = 240. \tag{2'}$$

$(2') - (1) \times 3$，得

$$3x + y = 90.$$

$$\therefore \quad y = 90 - 3x. \tag{7}$$

$(2') - (1) \times 4$，得

$$2x - z = 40.$$

$$\therefore \quad z = 2x - 40. \tag{8}$$

把(7)代入(4)，得

$$x \leqq 30,$$

把(8)代入(5)，得

$$x \geqq 20.$$

因此，連同(3)式在一起，x 的值所适合的不等式是：

$$x \geqq 0,\ x \leqq 30,\ x \geqq 20.$$

要使这几个不等式同时成立，实际上就是要使 x 的值适合于不等式：

$$20 \leqq x \leqq 30. \tag{9}$$

再把(7)、(8)代入(6)，得

$$w = 4350 + 5x. \tag{10}$$

这样，問題就变成要在(9)式的条件下，求(10)式里 w 的最大值。

容易看到，如果 x 的值取得尽可能地大，也就是 $x=30$ 时，w 就取得最大值，这时 $y=0$, $z=20$. 問題的結果是：应当种 30 亩地蔬菜，20 亩地水稻，这时得到的总产值就会最高。这个总产值是 4500 元.

上面这个結果似乎可以这样来解釋：因为每亩地的产值以蔬菜为最高，我們就应当尽可能多种蔬菜，但是种蔬菜所需要的劳动力較多，因此要使得 50 亩地都种上农作物，就应当有一部分地种水稻. 至于不种棉花的原因，是因为种水稻比种棉花所需要的劳动力少，这样才能保証有較多的劳动力来种蔬菜.

但是，这样的解釋并不完全可靠. 如果水稻的預計产值是每亩 50 元，而其他的一切数据都照旧，那末，(7)、(8)、(9)三式不变，而(6)式就变成为

$$w = 110x + 75y + 50z. \tag{11}$$

因此(10)式就变成为

$$w = 4750 - 15x. \tag{12}$$

很明显，这时，x 的值取得尽可能小时，也就是 $x=20$ 时，w 取得最大值. 这时，$y=30$, $z=0$. 而总产值 w 的最大值是 4450 元. 在这种情况下，不种水稻就能使总产值更高一些. 这个

結果似乎也可以这样来解釋：因为每亩地的产值以水稻为最低，我們就应当尽量少种水稻.

但是，比較一下上述两个結果，我們可以看出：每亩地的产值同样以蔬菜为最高，以水稻为最低，在第一种情况下，不种棉花可以得到最高的产值，而在第二种情况下，不种水稻却得到最高的产值，所以説上面的两种解釋都是不完全可靠的，作出这两种解釋时都只看到了一个因素.因此，到底在什么情况下，采取什么方案最好，要通过計算才能作出正确的結論，不能只抓住一个因素就輕易地下結論.

現在我們再来考察一个关于产品調运分配的問題.

甲、乙两个工厂生产某种棉布．甲厂年产10万匹，乙厂年产8万匹．它們生产的棉布要分配給A、B两个供应站．这两个工厂到供应站的距离以及两个供应站的实际需要量是：

	甲厂到供应站的距离	乙厂到供应站的距离	布匹的需要量
A站	8 公里	4 公里	6 万匹
B站	12 公里	10 公里	12 万匹

如果每一万匹布每公里的运費是9元，这两个厂各供应A、B两个站多少匹棉布，才能使得运輸費用最省？(图1)

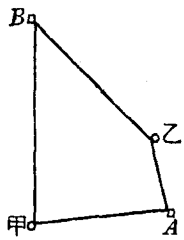

图 1

为了方便起見，我們把一万匹作为一个单位．設甲厂供应A站的棉布是x万匹，乙厂供应A站的棉布是y万匹．那末，甲、乙两厂供应

B 站的棉布分别是 $(10-x)$ 万匹、$(8-y)$ 万匹．根据已知条件，可以得到等式：

$$x+y=6;$$

$$(10-x)+(8-y)=12.$$

这两个方程实际上是一致的．从它們可以得到

$$y=6-x. \tag{1}$$

另外，如果設运費是 w 元，那末

$$\begin{aligned} w &= 9[8x+12(10-x)+4y+10(8-y)] \\ &= 9(200-4x-6y) \\ &= 18(100-2x-3y). \end{aligned} \tag{2}$$

把(1)代入(2)，得

$$w=18(82+x). \tag{3}$$

并且 x、y 的值必須适合于下列不等式：

$$x \geqq 0; \tag{4}$$

$$y \geqq 0; \tag{5}$$

$$10-x \geqq 0; \tag{6}$$

$$8-y \geqq 0. \tag{7}$$

把(1)代入(5)，得

$$x \leqq 6.$$

所以 x 的值必須适合于不等式：

$$0 \leqq x \leqq 6. \tag{8}$$

我們还可以看到，适合于不等式(8)的所有 x 的值，也一定都适合于不等式(6)、(7)．

很明显，在这个取值范圍内，当 $x=0$ 时，w 就取得最小值，这时，$y=6$．这就是說，乙厂供应 A 站 6 万匹布，供应 B 站 2 万匹布；甲厂供应 B 站 10 万匹布，这时需要的运輸費用

最小．这个最小値是 1476 元．

这个結果似乎可以这样来解釋：因为 A 站离乙厂近，A 站的需要量全部由乙厂来供应就最为合算．但是，如果我們把甲厂到 B 站的距离改为 20 公里，而不改变其他的一切数据，这时，(1)、(8) 两式不变，而 (3) 式就变成为

$$w=18(122-3x). \tag{3'}$$

很明显，这时，当 x 取得的值最大时，w 取得的値就最小．因此，当 $x=6$ 时，需要的运輸費用才为最省，这时，$y=0$．这就是說，甲厂供应 A 站 6 万匹布，供应 B 站 4 万匹布；乙厂供应 B 站 8 万匹布，这时需要的运輸費用最小，这个最小值是1872 元．

这个結果似乎也可以这样来解釋：因为甲厂离 B 站比乙厂离 B 站远得多，甲厂要尽可能地少把棉布供应給 B 站就比較合算．但是，这时乙厂离 A 站仍旧是这样近，而最合算的方案却要求乙厂把全部棉布供应給 B 站．这說明：如果我們单从乙厂到 A 站的距离出发来考虑問題，就不能得出正确的結論，而必須考虑一切因素，并且通过計算才能得出正确的結論．

二　一次函数的极值問題

前面所說的两个例子里都出現了一些含有未知数 x、y、z 的綫性方程，含有这些未知数的一次不等式以及一个含有这些未知数的一次表达式（或者称为一次函数），問題是：要在未知数 x、y、z 的值受到这些方程和不等式的限制的条件下，求

这个一次函数的最大值或者最小值.

在上面这两个例子里,我們所采用的解法的步驟是:

(1) 从綫性方程里解出未知数 y、z、……,把它們表示成 x 的一次表达式.

(2) 把这些表达式代入所有的不等式,最后得到必須保留的不等式,把它写作

$$a \leqq x \leqq b. \tag{1}$$

(3) 把这些一次表达式代入要考虑它的最大值或者最小值的一次函数中,得到一个关于 x 的一次函数

$$w = cx + d. \tag{2}$$

这样,問題就归結为,在 $a \leqq x \leqq b$ 的范圍內(一般說作当 x 在区間 $[a, b]$ 上),求函数 $w = cx + d$ 的最大值和最小值.

这个問題是很容易解决的. 如果 $c > 0$,取 $x = b$ 时,w 就有最大值 $bc + d$;取 $x = a$ 时,w 就有最小值 $ac + d$. 反过来,如果 $c < 0$,那末取 $x = b$ 时,w 就有最小值 $bc + d$;而取 $x = a$ 时,w 有最大值 $ac + d$.

这样,我們就很順利地解决了这一类問題. 但是,在解这类問題的时候,我們还会遇到这样的情况,根据列出的綫性方程組,无法把未知数 y、z、…… 表示成 x 的一次式. 例如,我們来看这样的一个問題:

設 x、y、z 的值适合于方程

$$x + y + z = 1 \tag{1}$$

和不等式

$$0 \leqq x \leqq 1, \tag{2}$$

$$0 \leqq y \leqq 1, \tag{3}$$

$$2y + z \geqq \frac{3}{2}. \tag{4}$$

求函数

$$w=2x+5y+4z \tag{5}$$

的最大值和最小值.

这里有三个未知数，而只有一个方程，所以我們无法把 y、z 表示成 x 的一次式. 但是，从(1)式可以解得

$$z=1-x-y. \tag{6}$$

把(6)代入(4)，得

$$y-x\geqq\frac{1}{2}, \tag{7}$$

又把(6)代入(5)，得

$$w=4-2x+y. \tag{8}$$

这样，問題就变成为：求 x、y 的数值，这些值不仅使不等式(2)、(3)、(7)都能成立，并且要使 w 有最大值或者最小值.

要解这个問題，我們先要考虑究竟有哪些 x、y 的值能适合不等式(2)、(3)、(7). 关于这一点，应用平面上的直角坐标系是比較方便的.

不等式(2)、(3)、(4)实际上可以改写成为：

$$x\geqq0;\ \ x\leqq1;\ \ y\geqq0;\ \ y\leqq1;\ \ y-x\geqq\frac{1}{2}$$

把这些不等式的結果反映到平面直角坐标系上：$x\geqq0$ 表示点 $(x,\ y)$ 必須在直綫 $x=0$ 的右边；$x\leqq1$ 表示点 $(x,\ y)$ 必須在直綫 $x=1$ 的左边；$y\geqq0$ 表示点 $(x,\ y)$ 必須在直綫 $y=0$ 的上方；$y\leqq1$ 表示点 $(x,\ y)$ 必須在直綫 $y=1$ 的下方；而 $y-x\geqq\frac{1}{2}$ 表示点 $(x,\ y)$ 又必須在直綫 $y=x+\frac{1}{2}$ 的上方［这里所說的点 (x,y) 在某条直綫的一側，是包括这个点在这条直綫上的情形的］. 在平面上画出这个图形，可以看到点 $(x,\ y)$ 的取值范圍

是在 $\triangle ABC$ 的內部和它的边界上的各个点．（图 2）

現在再来看函数 $w=4-2x+y$．如果設

$$y-2x=k, \tag{9}$$

那末

$$w=4+k.\quad (k \text{ 是任意实数})$$

(9)式表示一系平行的直綫，如果 k 的值由小到大地改变，对应的直綫的位置就随着向上方移动．又 $\triangle ABC$ 的頂点 A、B、C 的坐标分别是 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$、$\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$、$(0,\ 1)$，所以，这系平行的直綫中直綫 $y-2x=0$ 經过点 B，直綫 $y-2x=\frac{1}{2}$ 經过点 A，直綫 $y-2x=1$ 經过点 C．

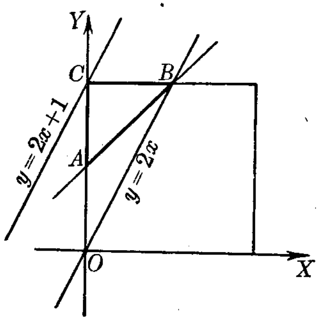

图 2

$\triangle ABC$ 在直綫 $y-2x=0$ 的上方，而在直綫 $y-2x=1$ 的下方．因此，w 在点 C 处可以取到最大值，这时，$w=4+1=5$；而在点 B 处可以取到最小值，这时，$w=4+0=4$．

上面这个例子表明，如果一个問題里含有未知数 x、y、z、u、……，并且未知数 z、u、……都可以表示成关于 x、y 的一次式，我們就可以先利用直角坐标系，画出关于 x、y 的不等式所表示的图形（这个图形是由直綫圍成的，所以它是一个多角形），然后再象上面这个例子里所做的那样画一系平行的直綫，这样就可以知道 w 在什么地方取得最大值或者最小值．上面这个例子里 w 的最大值和最小值都是在三角形 ABC 的頂点上取得的．这个事实并不是偶然的．因为如果給定一个多角形以后，和这个多角形有公共点的一系平行的直綫中，最

下面的一条和最上面的一条一定要經过这个多角形的某一个頂点．这个事实，这里我們不准备加以严格地証明了．讀者可以从图3和图4理解到这一点．在图3里，最上面的一条直綫和最下面的一条直綫各經过一个頂点；而在图4里，最上面的一条直綫和多角形的一条边重合，所以它經过两个頂点．因此，要求出一个一次函数的最大值和最小值，就只需把这个函数在相应的多角形的每一个頂点的数值算出来，其中最大的也就是函数的最大值，最小的也就是函数的最小值．

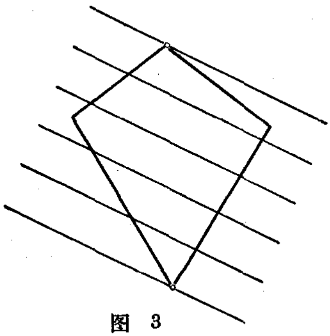

图 3

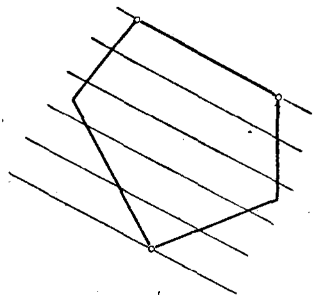

图 4

通过上面这些例子，我們已經把“綫性規划”这一数学分科的最原始的思想介紹出来了．一般地說，“綫性規划”里所要討論的問題是：設 x、y、z、u、……等未知数适合于一些綫性方程和一些綫性不等式，又 $w=ax+by+cz+du+\cdots\cdots+h$ 是一个綫性函数，求这个函数的最大值和最小值．

在研究这类問題的时候，如果可以从綫性方程中得到用 x 的一次式来表示其他未知数 y、z、u、……，或者，可以从綫性方程中得到用 x、y 的一次式来表示其他未知数 z、u、……，那末，这类問題就可以用我們上面讲过的方法来处理．如果遇到独立的自变量的个数大于2，那末也可以用类似的方法

来討論这类問題. 但是,这里我們首先要用到一般的多元綫性方程組的理論,其次,还必須具有較高的空間想象能力,要把适合綫性不等式的一些未知数的数值看成是多元空間的多面体內部(或者边界上)的点,这时,綫性函数的最大值和最小值也会在这个多面体的頂点上取得. 这些內容已經超出了初等数学的范圍,我們在这里不能作更多的解釋. 而在实际应用中,往往还会遇到含有几十个甚至于几百个未知数的問題,解决这样的問題需要进行大量的計算,以致于要应用电子計算机才行. 对于某些具体問題如物資調运等,从实踐中已經总結出了不少求一次函数的最大值和最小值的好方法. 对这方面有兴趣的讀者可以参看有关綫性規划的书籍,这里就不作詳細的介紹了.

三　二次函数的极值問題

在上一节里,我們已經把最簡单的一次函数在区間$[a,b]$上的最大值和最小值的問題討論清楚了. 但是即使是限于一个自变量的情況,在实踐活动中,我們往往还会遇到比較复杂的函数的极值問題. 先看这样的一个例子:

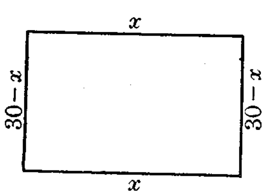

图 5

某生产队要办一个养鸡場,准备用篱笆圍成一个矩形的場地. 現在有可以編制 60 米长篱笆的竹料,場地的长和寬应当各是多少米,才能使場地的面积为最大?(图 5)

我們仍旧采用上一节里介紹的