林华铁　张乃一　编

线性代数

（少学时）

.2

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

线性代数

（少学时）

林华铁　张乃一　编

天津大学出版社

内 容 提 要

本书根据工科数学课程教学基本要求中线性代数部分的要求编写而成.内容包括行列式、矩阵、n 维向量及向量空间、线性方程组、矩阵的相似对角形和二次型共6章,所需学时为32学时.

本书可作为高等工科院校各专业的教学用书和教学参考书,也可作为大学专科及高等职业院校的教学用书及自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/林华铁,张乃一编.一天津:天津大学出版社,2001.8(2003.10重印)

ISBN 7-5618-1459-3

Ⅰ.线… Ⅱ.①林…②张… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第041179号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印　　刷 天津市宝坻区第二印刷厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 148mm × 210mm
印　　张 6.625
字　　数 198千
版　　次 2001年8月第1版
印　　次 2003年10月第4次
印　　数 12 001 — 16 000
定　　价 11.00元

前　　言

近年来对工科数学教学改革的要求是在学生掌握本课程的基本内容和基本方法前提下减少学时，这就需要有一本使学生便于自学且能牢固地掌握知识的教材．本书就是基于这个指导思想，在天津大学进行多次教学改革实践的基础上，编者总结经验并根据全国工科数学课程教学指导委员会制定的《线性代数教学基本要求》编写而成．

在本书的编写过程中，我们努力做到由浅入深、循序渐进．在内容的讲述和一些结论的证明过程中力求简单明了，便于自学，每章内容之后除了附有部分习题，用以复习和巩固本章内容，还有本章小结，以帮助读者对本章内容有个总体的了解，并可将所学内容连贯起来．

本书所需学时为 32 学时，可满足一般高等学校工科专业线性代数课程的基本要求．

本书第 1、第 2、第 5、第 6 章由林华铁编写，第 3、第 4 章由张乃一编写．由于编者的水平所限，不妥之处在所难免，恳请读者批评指正．本书的出版得到天津大学数学系、天津大学教务处及天津大学出版社的大力支持，徐绥教授仔细地审阅了全书，并提出了许多宝贵意见，在此一并表示感谢．

编者

2001 年 5 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章　行　列　式

线性方程组是线性代数中的一个重要基础部分，而行列式是研究线性方程组和矩阵的一个有力工具，同时在许多理论和实际应用问题中也起着重要的作用.

1.1　排列与逆序

先看一个例子.

引例　用1,2,3三个数字，可以组成多少没有重复数字的3位数?

解　这个问题是说，把三个数字分别放在百位、十位与个位上有几种不同的放法？显然，百位上可以从1,2,3三个数字中任选一个，有3种选法；十位上只能从剩下的两个数字中选一个，有2种选法；而个位上只能放最后剩下的一个数字，只有1种选法.因此，共有 $3\times2\times1=3!=6$ 种选法.

这6个不同的3位数是

$$123,132,213,231,312,321.$$

定义1.1　由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为这 n 个数的一个 n 阶全排列，简称为 n 阶排列，记为 $i_1i_2\cdots i_n$.

由 n 个数组成的 n 阶排列共有 $n!$ 个.

按数字由小到大的自然顺序排列的 n 阶排列 $1\ 2\cdots n$ 称为标准排列.

定义1.2　在一个 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，若某个较大的数排在某个较小的数前面，则称这两个数构成一个逆序，在一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例　求排列3 2 5 4 1的逆序数.

解 在排列 3 2 5 4 1 中,1 的前面比 1 大的有 4 个数与 1 构成逆序,2 的前面比 2 大的有 1 个数与 2 构成逆序,3 排在最前面,与其他的数不构成逆序,4 的前面比 4 大的有 1 个数与 4 构成逆序,5 是最大的数,与它前面的数不构成逆序,所以

$$\tau(3\ 2\ 5\ 4\ 1)=4+1+0+1+0=6.$$

同样有

$$\tau(4\ 3\ 1\ 2)=2+2+1+0=5,$$

$$\tau(1\ 2\ \cdots\ n)=0.$$

逆序数是奇数的排列称为奇排列;逆序数是偶数的排列称为偶排列.标准排列为偶排列.

排列具有下列性质.

性质 1 对换一个排列中的任意两个数,则排列改变奇偶性.

证明 (1)对换相邻的两个数,设给定的排列为

$$\underbrace{\cdots}_{A}\ ij\ \underbrace{\cdots}_{B}$$

其中 A 与 B 表示若干个保持不动的数,经过 i 与 j 的对换后得到

$$\underbrace{\cdots}_{A}\ ji\ \underbrace{\cdots}_{B}$$

显然,在对换前后的两个排列中,属于 A 或 B 的数的位置没有改变,因此,这些数所构成的逆序总数没有改变;同时 i,j 与 A 或 B 中的数所构成的逆序总数也没有改变,而当 $i<j$ 时,对换后,i 与 j 构成一个逆序,则对换后的排列的逆序数增加 1;当 $i>j$ 时,对换后,排列的逆序数减少 1.因此,不论是哪一种情形,排列的奇偶性都有改变.

(2)对换不相邻的两个数,假定 i 与 j 之间有 m 个数,用 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 代表,这时给定的排列为

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_mj\cdots \tag{$*$}$$

经过 i 与 j 的对换后得到

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_mi\cdots \tag{$**$}$$

在排列($*$)中,先将 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 对换,这样经过 m 次相邻两数的对换后,($*$)变成

$$\cdots k_1 k_2 \cdots k_m i j \cdots$$

再将 j 依次与 $i, k_m, \cdots, k_2, k_1$ 对换,这样经过 $m+1$ 次相邻两数的对换后得到

$$\cdots j k_1 k_2 \cdots k_m i \cdots$$

这正是对排列(*)经过 i 与 j 的对换后得到的排列(* *).因此,对排列(*)经过 i 与 j 的对换相当于连续经过 $2m+1$ 次相邻两数的对换,而每一次相邻两数的对换都改变排列的奇偶性,所以奇数次相邻两数的对换也改变排列的奇偶性.

例如,排列 3 2 5 4 1 经过 3 与 4 对换后得到排列 4 2 5 3 1,

$$\tau(3\ 2\ 5\ 4\ 1)=6, \tau(4\ 2\ 5\ 3\ 1)=7.$$

性质 2 任一 n 阶排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与标准排列 $1\ 2 \cdots n$ 都可经过一系列对换互变,且所做对换的次数与排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 具有相同的奇偶数.

证明 对排列的阶数作数学归纳证明.

对于二阶排列,结论显然成立.

假设对于 $n-1$ 阶排列,结论成立,现在证明对于 n 阶排列,结论也成立.

若 $i_n = n$,则由归纳假设知 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1}$ 是 $n-1$ 阶排列,可经过一系列对换变成 $1\ 2 \cdots (n-1)$,于是这一系列对换就把 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 变成 $1\ 2 \cdots n$,由归纳假设,结论成立.若 $i_n \neq n$,则先经过 i_n 与 n 的对换,使之变成 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} n$,这就归结成上面的情形,所以结论成立.相仿地,$1\ 2 \cdots n$ 也可经过一系列对换变成 $i_1 i_2 \cdots i_n$.因此结论成立.

因为 $1\ 2 \cdots n$ 是偶排列,由性质 1 可知,当 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是奇(偶)排列时,必须经过奇(偶)数次的对换才能变成偶排列,所以,所做对换的次数与排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 具有相同的奇偶性.

1.2 行列式的定义

为了定义 n 阶行列式,我们先引入二阶、三阶行列式.

用消元法求解下列二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

用 a_{22} 乘第一个方程，用 $-a_{12}$ 乘第二个方程得到与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -a_{12}b_2. \end{cases}$$

再将这两个方程相加便消去 x_2，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2. \tag{2}$$

用类似的办法可消去 x_1，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \tag{3}$$

为了便于记忆，我们引入符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为二阶行列式，并用 D 表示，称之为二元线性方程组(1)的系数行列式，数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做这个行列式的元素.

同样

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

也是二阶行列式.

因而方程(2)，(3)可写成

$$Dx_1 = D_1, \quad Dx_2 = D_2.$$

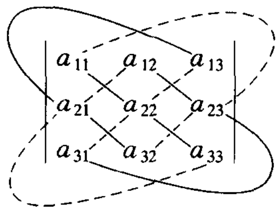
当 $D \neq 0$ 时，由方程(2)，(3)可以得到线性方程组(1)的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

用同样的方法可以定义三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

根据上述定义,给出三阶行列式的计算法则:



在实线上的 3 个元素的乘积取正号,共 3 项:

$$+a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32};$$

在虚线上的 3 个元素的乘积取负号,共 3 项:

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

这 6 项的代数和就是三阶行列式 D 的值.

例如,三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=3\times2\times4+4\times5\times(-2)$$
$$+(-1)\times1\times(-3)-3\times5\times(-3)$$
$$-4\times1\times4-(-1)\times2\times(-2)$$
$$=24-40+3+45-16-4$$
$$=12.$$

注意　这种计算方法只适用于二三阶行列式.

由三阶行列式的定义不难看出三阶行列式有如下特点:

(1)三阶行列式的每一项都是位于不同行不同列的 3 个元素的乘积.

(2)每一项的各元素都带有两个下标,第一个下标表示这个元素所在的行的序数(行标),第二个下标表示这个元素所在的列的序数(列

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

标),当每一项中各元素的行标是按照自然顺序排列时,其列标都是1,2,3的一个排列,并且每一个三阶排列都对应着三阶行列式的一项,所以,三阶行列式是3! =6项的代数和.

(3)当各元素的行标按照自然顺序排列时,每一项的符号是由列标所组成的三阶排列的奇偶性所决定:列标的排列为偶排列时,该项取正号;列标的排列为奇排列时,该项取负号.

我们根据这个规律可以定义 n 阶行列式.

定义 1.3 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

做出表中位于不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任一个 n 阶排列,项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,这样的项共有 $n!$ 项,所有这 $n!$ 项的代数和称为 n 阶行列式,用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

当 $n=1$ 时,$|a|=a$,注意不要与绝对值记号相混淆.当 $n=2,3$ 时,就是二阶、三阶行列式.

n 阶行列式中从左上角元素 a_{11} 到右下角元素 a_{nn} 这条对角线称为 n 阶行列式的主对角线.

例 用行列式的定义计算上三角行列式(主对角线以下的元素都为零的行列式,叫做上三角行列式).

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由 n 阶行列式的定义可知,展开式中的一般项形式为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

由于 D 中有许多元素是零,所以只需求出上述一切项中不为零的项即可.在第 n 行中除a_{nn}外,其他元素都是零,这就是说,j_n 只能取n,即 $j_n=n$;在第 $n-1$ 行中除 a_{n-1n-1},a_{n-1n}外,其他元素也都是零,因此 j_{n-1}也只有取 $n-1$ 和 n 这两种可能,又由于 a_{nn},a_{n-1n}位于同一列,所以只能取 $j_n=n-1$.这样逐步往上推可得 $j_2=2,j_1=1$.从而可知在展开式中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$一项不等于零,而这项的列标所组成的排列是一个标准排列,应取正号.因此,由行列式定义有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即上三角行列式的值等于主对角线上各元素的乘积.

同理可求得下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n.$$

此行列式称为对角行列式.

在 n 阶行列式的定义中,为了讨论方便而把每一项的 n 个元素的行标写成标准排列,设

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

是 n 阶行列式的任意一项,则由乘法的可交换性,可把该项的列标所组成的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 经过 t 次对换变成标准排列 $1\ 2\ \cdots\ n$,与此同时,相应的行标所组成的标准排列 $1\ 2\ \cdots\ n$ 经过 t 次对换变成排列 $i_1i_2\cdots i_n$,即有

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

根据排列的性质 2 可知,t 与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 具有相同的奇偶性,而 t 与 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 也具有相同的奇偶性.从而知 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 与 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 也具有相同的奇偶性,所以

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

因此可以得到行列式的等价定义:

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

1.3 行列式的性质

直接根据定义计算 n 阶行列式是非常麻烦的,特别是当 n 较大时,计算量会相当大.在本节中,我们将介绍行列式的性质,并利用这些性质把复杂的行列式转化为较简单的行列式(如上三角行列式等)来计算.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D' 为 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D'$.

证明 设 D 的转置行列式为

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,根据行列式的等价定义有

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n} \\ &= D. \end{aligned}$$

此性质说明,行列式中的行与列具有同等的地位,因此凡是对行成立的性质对列也同样成立,反之亦然.所以下面的性质,只对行加以证明.

性质 2 交换行列式的任意两行(列),行列式改变符号.

证明 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换 D 的第 i 行与第 j 行得到

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $b_{kl}=a_{kl}(k\neq i,j),b_{il}=a_{jl},b_{jl}=a_{il}(l=1,2,\cdots,n)$，由行列式的定义有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}b_{1k_1}\cdots b_{ik_i}\cdots b_{jk_j}\cdots b_{nk_n} \\ &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{jk_i}\cdots a_{ik_j}\cdots a_{nk_n} \\ &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n)+1}a_{1k_1}\cdots a_{ik_j}\cdots a_{jk_i}\cdots a_{nk_n} \\ &= -\sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{ik_j}\cdots a_{jk_i}\cdots a_{nk_n} \\ &= -D. \end{aligned}$$

性质 3 若行列式 D 中有两行(列)元素对应相等，则这个行列式等于零.

证明 设行列式 D 的第 i 行与第 j 行($i\neq j$)元素对应相等，一方面由性质 2 可知，交换这两行后，行列式改变符号，所以新的行列式等于 $-D$；而另一方面，交换元素对应相等的两行后，行列式并没有改变，仍为 D，因此有

$$D=-D,$$

即

$$D=0.$$

性质 4 把行列式 D 中某一行(列)的所有元素同乘以某一个数 k，等于用数 k 乘此行列式 D.

证明 设把行列式 D 的第 i 行元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 乘以 k 得到行列式 D_1，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}.$$

由行列式定义有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= kD. \end{aligned}$$

推论 1　行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 2　若行列式中有某一行(列)的元素全是零,则这个行列式等于零.

性质 5　若行列式 D 中有两行(列)元素对应成比例,则这个行列式等于零.

证明　设行列式 D 的第 i 行与第 j 行($i \neq j$)的元素对应成比例,即

$$a_{i1} = ka_{j1}, a_{i2} = ka_{j2}, \cdots, a_{in} = ka_{jn},$$

因此

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com