中学数学丛书

代数函数与解题

天津市数学会编

天津科学技术出版社

中学数学丛书

代数函数与解题

刘玉翘　　王元阳

天津市数学会编

天津科学技术出版社

责任编辑：黄立民

中学数学丛书

代数函数与解题

刘玉翘　王元阳

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

河北省景县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本787×1092毫米　1/32　印张10.625　字数225 000

1987年11月第1版

1987年11月第1次印刷

印数：1—8 600

书号：7212·26　定价：2.05元

ISBN 7-5308-0104-X/O·6

目　录

一、函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活和科学技术中，我们要遇到各种各样的量，例如，长度、时间、重量、面积、热量、款项、产量、密度、速率等等，我们把可以比较大小，可以相合并的量叫做同类量。各种不同的量都可以用取定的同类量作为度量单位来量它的大小。

表示一个量和度量单位的比的数目叫做这个量的数值或数量。

量是通过数来表达的，在我们研究的问题里，根据表达量的数的不同情况，把量可以分成两种：在问题所考虑的过程中，可以取不同数值的量叫做变量；在问题所考虑的过程中，保持一定数值的量叫做常量；变量所取值的集合叫做该变量的变域。

例如，弹簧的伸长与下挂的物体重量是成正比的，今有一个能测定到500克的弹簧秤，在没挂任何物体时，弹簧的长度是30厘米，每挂1克重的物体，弹簧就伸长0.3厘米。

我们设悬挂x克的物体时，弹簧的长度为y厘米，则物体重量和弹簧长度的对应关系可表示为

$$y=0.3x+30.$$

在研究这个问题的过程中，x，y都是变量，而弹簧原来的长度30厘米和每挂1克重的物体，弹簧就伸长0.3厘米都是常量。变量x，y不是取任何值都行的，而是有一定的限制的。x和y的变域分别是

$X = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 500\}$

和

$Y = \{y \mid 30 \leqslant x \leqslant 180\}$.

常量和变量是对某一过程来说的，是相对的，同一个量在某种条件下是常量，而在另外条件下又可以是变量。我们仍然拿弹簧作例子：今有一批长短、粗细不等的弹簧，各挂50克的重物后，长均为200厘米。这时弹簧所挂物体的重量和挂重物后的长度均为常量，而没挂物体时，弹簧的长度和弹簧的弹性系数就是变量了。

2．映射与函数

设A，B是两个集合，如果按照某种对应法则f，对于集合A的任何一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应（包括集合A，B及从A到B的对应法则f），叫做从集合A到集合B的映射．记作

f：$A \to B$.

映射也叫做单值对应．这里包括了A中不同元素对应B的不同元素，也包括A中不同元素对应B的同一元素的情形。

如果给定一个从集合A到集合B的映射，那么和A中的元素a对应的B中的元素b叫做a的象，a叫做b的原象。

从映射的概念可以知道，映射f：$A \to B$包括了三部分：原象集合A，象所在的集合B以及从A到B的对应法则f.

这时，称$f(x)$为f在点x的值，集合A的元素x称为自变量，集合B中对应的元素y称为因变量。

映射中的两个集合可以是任何集合，特别地，当A,B都是数的集合时，则把从A到B的映射叫做函数，即对于数集A中的每一个确定的值x，按照某种对应法则f，在数集B中都有唯一确定的值y和它对应，则称映射f：$A \to B$是从A到

B的函数，用

$$f: x \to y$$

或 $$y = f(x)$$

来表示。读作y是x的函数或x的函数$f(x)$，并称x的集合A为函数$f(x)$的定义域。y的集合$\{y \mid y = f(x), x \in A\}$称做$f(x)$的值域。

这里特别要注意：$\{y \mid y = f(x), x \in A\}$并不一定等于集合$B$，而是集合$B$的一个子集（甚至是$B$的真子集）。

所以，函数是由定义域、值域以及从定义域到值域上的对应法则三部分组成的一类特殊的映射。

例如，$y = 2x + 1$是使x有$2x + 1$与之对应的函数。这个函数的定义域是实数R，值域也是实数R，对应法则是"自变量x乘2加1"。这个函数是一个从R到R上的映射。

又如，$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$，则f是使x有$\dfrac{1}{x-2}$与之对应的函数。这个函数的定义域是除去2的全体实数，记为

$$\{x \mid x < 2 \text{ 或 } x > 2\}.$$

值域是除去0的全体实数，记为

$$\{y \mid y < 0 \text{ 或 } y > 0\}.$$

对应法则是"自变量x减2的倒数"。

一般地，如果对自变量x的变域加以限制，则值域也相应地受到限制。

3．函数关系的表示法

我们说表示一个函数或给出一个函数，意思是指出了函数的定义域及其对应关系。

表示函数关系的方法，一般常用的有以下三种：

（1）解析法（也叫公式法）

就是把变量之间的对应关系，用等式来表示。这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式．这种用解析式来表示函数的方法叫做解析法，也叫公式法．

例如，前面例子中物体重量与弹簧长度的对应关系表示为$y=0.3x+30$就是用解析法来表示函数关系的．

又如，函数y与自变量x之间成反比例关系，可表示成

$$y=\frac{k}{x}，（k为常数）$$

用此法表示函数的关系，有时用一个等式。有时用几个等式。

例如，函数$y=|x-3|$，也可以表示成

$$y=\begin{cases}x-3 & 当x\geqslant 3时，\\ 3-x & 当x<3时.\end{cases}$$

这种方法便于运用数学上的一些运算规律做准确的计算、分析、推导，最适于作理论的研究，但此法缺乏直观性．

（2）列表法（表格法）

把自变量的一系列的值和对应的函数值按一定顺序列成表来表示这两个变量之间的函数关系，叫做列表法．有的书上也叫表格法．

我们熟知的平方表、平方根表、三角函数表、对数表等等都是用列表法来表示函数关系的．一个粮店、商店的售货员常用此法列出某种商品的数量与总价的对应表．

此法突出了对应状况，从表中就可以查出函数值，便于做数值计算．但此法对多数函数不能列出自变量所取的一切值和与之对应的函数值，也不能象图象那样直观地观察出函数变化规律，因而此法不易于探讨函数性质．

（3）图象法（图示法）

用坐标平面上适合于变量间的函数关系的点的轨迹表示函数的对应关系，叫做图象法，有的书上也叫图示法.

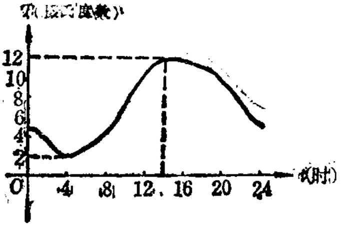

图 1 - 1

例如，自动温度记录仪在图纸上描出的气温随时间的变化曲线，可以很直观地看到时间与气温的函数关系（如图 1 - 1 ）

此法直观醒目，可以从图象上直观地看出函数的某些性质，可以直接找出自变量所对应的函数值.但此法有局限，因为一般不能得出完整的图象，通常只能得到近似的图象，所以从图象上读出的函数值一般是近似值. 从图象上观察函数性质，一般也是不深刻不细致的.

（4）叙述法

用语言直接叙述函数的对应关系，叫做叙述法.

例如，函数

$$y=\begin{cases}1 & x\text{为有理数；}\\ 0 & x\text{为无理数.}\end{cases}$$

可用语言直接叙述为：

当自变量x取有理数时，对应的函数值是 1；当自变量x取无理数时，对应的函数值是 0 .

这是有名的狄里赫勒函数.

又如，用高斯符号表示的函数

$$y=[x].$$

可用语言叙述为：

y是不超过实数x的最大整数. 例如：

$y=\left[\dfrac{1}{5}\right]=0$；　　$y=[4]=4$；

$y=[4.5]=4$；　　$y=[-1.67]=-2$。

有些用语言叙述简明的函数关系可用此法。

（5）箭头图表示法

用箭头图连接两个集合里元素的对应关系，称为箭头图表示法。

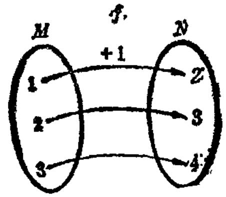

图 1－2

例如，集合M的元素x和集合N的元素y按$x+1=y$的对应关系对应着，则函数$y=f(x)$的关系可以用图 1－2 来表示。

此法直观，自变量与函数值的对应关系一目了然，但有局限性，多数函数不可能把所有的对应关系都表示出来。

4．坐标与图象

（1）坐标

我们知道，规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴．在数轴上的任意一点都可以找到唯一的实数和它对应，反过来，任给定一个实数在数轴上就可以找到唯一的一点和它对应．也就是说，数轴上的点与实数之间建立了一一对应的关系。

若任意一点P，对应着一个实数x，那么这个x称为P点的坐标，记作$P(x)$。

用实数来决定点的位置的方法叫做坐标法。

下面我们考虑平面上的点与一对有序实数之间的对应关系：

在平面内取两条具有公共原点且互相垂直的数轴构成平

面直角坐标系（简称坐标系）．这两条数轴叫做坐标轴，横的叫做x轴或横轴，纵的叫做y轴或纵轴．交点叫做坐标原点．坐标系所在的平面叫做坐标平面．在平面直角坐标系中，纵轴和横轴把平面分成四个部分，两轴正方向所夹的部分叫做第Ⅰ象限，其他按逆时针顺序分别叫做第Ⅱ、第Ⅲ、第Ⅳ象限．

有了平面直角坐标系，平面上的任意一点M，都可以用一对有顺序的实数x，y来表示．我们把实数x叫做M点的横坐标，实数y叫做M点的纵坐标，把它们合在一起叫做M点的坐标，记作$M(x,y)$．反过来，对于任何一对实数x和y，在平面上都表示一个确定的点，这一点的坐标就是(x,y)．

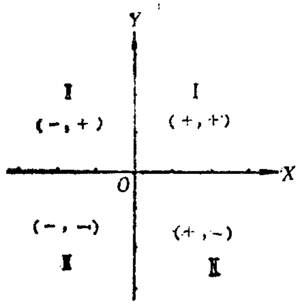

图 1 - 3

由此可知：坐标平面上的点和一对有序实数之间建立了一一对应关系．

在四个象限内坐标的符号见图1-3．

（2）图象

关于函数$y=f(x)$，在平面上取直角坐标系，我们把以$(x, f(x))$为坐标的所有点的集合叫做函数$y=f(x)$的图象．

如果F是函数$y=f(x)$的图象，那么F上任何一点的坐标(x, y)都满足$y=f(x)$；反过来，满足$y=f(x)$的点(x, y)必在F上．

作函数$y=f(x)$图象的基本方法是描点法．即先列出x，y的对应值表，再将表中每一对x，y的值在坐标平面内作出

一点，由此作出一系列的点，然后依照x由小到大的顺序，用光滑线连接各点，便得到函数 $y=f(x)$的图象．一般地，用以上方法画出的图象是近似的，当点作得越多时，画出的图象也就越精确．

设函数$f(x)$的定义域是x轴上的连续的点集合，并且a是它的一点，如果当x趋近于a时，$f(x)$趋近于$f(a)$，就说这个函数在a点连续．在定义域的每个点都连续的函数的图象是连续的线．对于连续函数的图象都可在描点的基础上用连续的曲线进行连接．

5．单值函数与多值函数

函数$y=f(x)$，对于自变量x的每一个值，y有唯一的一个值和它对应，这样的函数称为单值函数，若对于自变量x的某些值，y有两个或两个以上的值和它对应，这样的函数就称为多值函数．例如$y=\pm\sqrt{x}$．

对于初等函数来说，一个多值函数总可以把它分成几个单值函数（看成几个单值函数的组合），例如可以把多值函数$y=\pm\sqrt{x}$看成是两个单值函数$y=\sqrt{x}$和$y=-\sqrt{x}$的组合．这样我们研究每一个单值函数的性质后，就可以知道原来的多值函数的性质．所以在研究变数的实函数的时候，在一般情况下，都只研究单值函数．本书就采用了单值函数的定义，按照我们的定义$y=\pm\sqrt{x}$就不能称为“y是x的函数”了．

对于单值函数来说，并不要求在定义域里自变量的不同值，必须对应不同的函数值．例如$y=x^2$是单值函数，定义域是实数集R，对R里的任何相反数都得同一个函数值．

6．单变量函数与多变量函数

在以上函数的定义里，我们讨论的只是两个相互联系的

变量，即只有一个自变量的函数，我们称之为单变量函数，也叫做一元函数．但在实际问题中所遇到的变量间的相依关系，一般并不这样简单，往往会遇到有两个或两个以上的自变量，我们把这样的函数称为多变量函数．多变量函数的定义可仿照单变量函数定义给出．

定义：如果变量y与n个变量x_1，x_2，$\cdots$，x_n有关，当变量x_1，x_2，$\cdots$，x_n取一组允许值时，变量y有唯一确定的值和它对应，那么y是n个变量x_1，x_2，$\cdots$，x_n的函数．记做

$$y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n).$$

例如，$f(x,\ y)=4x^2-4xy+y^2$．

【例 1】 下面两个函数是同一个函数吗？试说明理由．

$$f(x)=\frac{x^2}{x},\qquad g(x)=x.$$

解 $f(x)$与$g(x)$不是同一个函数．

因为$f(x)$的定义域是不为零的实数，即

$$F=\{x|\ x\in R,\ x\neq 0\}.$$

而$g(x)$的定义域是实数集R．

由于定义域不同，所以它们不是同一函数．

【例 2】 设函数$f(x)$的定义域是非负整数组成的集合．

已知$f(0)=0$，当x为自然数时，$f(x)$表示x除以 5 所得的余数．

（1）求$f(4)$，$f(12)$，并作出这个函数的图象．

（2）研究下列命题是否正确？

（i）对于任意自然数x，$f(x+5)=f(x)$；

（ii）对于任意自然数x，y，$f(x+y)=f(x)+f(y)$．

解 （1）设k为非负整数，则由已知可得

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=5k,\\ 1 & x=5k+1,\\ 2 & x=5k+2,\\ 3 & x=5k+3,\\ 4 & x=5k+4.\end{cases}$$

$\because\ 4=5\times 0+4,$

$\therefore\ f(4)=4.$

$\because\ 12=5\times 2+2,$

$\therefore\ f(12)=2.$

这个函数的图象如图 1-4 所示.

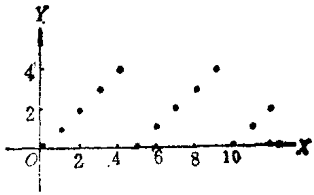

图 1-4

（2）（i）设x除以 5 所得商为k，余数为p，则

$$x=5k+p\ (k,\ p\text{是非负整数，且 }0\leqslant p<5\ )$$

从而，$x+5=5(k+1)+p$,

由k是非负整数，得$k+1$是自然数.

$$\therefore\ f(x)=p,\qquad f(x+5)=p.$$

即 $f(x+5)=f(x)$.

$\therefore$ 第（i）题的命题是正确的.

(ii) $\because x$，y是自然数，

$\therefore$ $x+y$是自然数.

因此 $0\leqslant f(x+y)<5$, $0\leqslant f(x)<5$, $0\leqslant f(y)<5$.

由（1）已知 $f(4)=4$，$f(12)=2$，

取$x=4$，$y=12$，则$f(x)+f(y)=6$.

$\therefore$ 第(ii)题的命题不正确.

【例 3】 若函数$f(x)$ 的定义域是实数集，且满足以下两点：

(i) $f(x)\begin{cases} = 0 & x = 0, \\ > 0 & x \neq 0. \end{cases}$

(ii) $f(xy) = f(x)f(y)$.

试证明：(1) $f(1) = 1$；

(2) $f(-1) = 1$；

(3) $f(-x) = f(x)$；

(4) 对于某个实数m，如果$f(m) > 1$，则$f\left(\frac{1}{m}\right) < 1$.

证明 (1) 在条件(ii)中，如果令$x = 1$，$y = 1$，则

$$f(1) = f(1)f(1). \tag{1}$$

由于在条件(i)中，当$x \neq 0$时$f(x) > 0$，

因此$f(1) \neq 0$.

所以用$f(1)$除(1)式的两边，则得

$$1 = f(1).$$

(2) 在条件(ii)中，令$x = -1$，$y = -1$，则

$$f(1) = f(-1)f(-1),$$

$\therefore$ $[f(-1)]^2 = 1$.

由条件(i)，有$f(-1) > 0$，

$\therefore$ $f(-1) = 1$.

(3) 在条件(ii)中，令$y = -1$，则

$$f(-x) = f(x)f(-1).$$

由(2)已证 $f(-1) = 1$，

$\therefore$ $f(-x) = f(x)$.

(4) 在条件(ii)中，如果令$x = m$，$y = \frac{1}{m}$，则

$$f(1) = f(m)f\left(\frac{1}{m}\right).$$

$\because \quad f(1)=1, \qquad \therefore \quad f(m)f\left(\frac{1}{m}\right)=1.$

由已知$f(m)>1$，因此

$$f\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{f(m)}<1.$$

【例 4】 对于任意实数x，y，函数$f(x)$满足：

(1)$f(x+y)=f(x)f(y)$，(2)$f(0)=1$，

(3)$f(1)=2$. 试求$f(n)$.

解　在(1)中，令$y=x$，则

$$f(2x)=f(x)f(x)=[f(x)]^2.$$

在上式中，令$x=1$，则上式变为

$$f(2)=[f(1)]^2.$$

由(3)知$f(1)=2$.

$\therefore \quad f(2)=[f(1)]^2=2^2.$

令$y=kx$，则(1)式变为

$$f((k+1)x)=f(kx)f(x).$$

令$x=1$，则

$$f(k+1)=f(k)f(1)=2f(k).$$

令k顺次为2，3，4，…，则关于任意的正整数n，有

$$f(n)=2^n.$$

在(1)中，令$y=x$，则

$$f(0)=f(x)f(-x).$$

即　$f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$. ($\because f(0)=1$)

$\therefore \quad f(-n)=\dfrac{1}{f(n)}=\dfrac{1}{2^n}=2^{-n}.$

$\therefore$　对任意整数n有