现代数学基础丛书 85

数理逻辑引论与归结原理

王国俊 著

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书　　85

数理逻辑引论与归结原理

王国俊　著

陕西师范大学优秀学术著作基金资助出版

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书内容可分为4部分. 第一部分讲述了与逻辑演算有密切关系的Boole代数理论，并以此为工具证明逻辑演算理论中的两个完备性定理. 第二部分深入浅出地系统讲述命题演算与一阶谓词演算理论. 第三部分清楚而严谨地讲述归结原理理论，给出了各个难点内容的完整证明. 第四部分讲述多值逻辑演算理论，包括Łukasiewicz连续值逻辑及相关的MV代数理论以及由作者建立的$\mathscr{L}^*$逻辑系统和相关的R_0代数理论.

本书可供计算机专业、应用数学专业、人工智能专业的研究生与高年级本科生及教师阅读.

图书在版编目(CIP)数据

数理逻辑引论与归结原理/王国俊著. —北京:科学出版社,2003
(现代数学基础丛书;85)
ISBN 7-03-011579-1

Ⅰ. 数… Ⅱ. 王… Ⅲ. ①数理逻辑 ②归结方法 Ⅳ. O141

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第049288号

责任编辑:毕 颖/责任校对:刘小梅
责任印制:钱玉芬/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003年9月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2003年9月第一次印刷 印张: 14 1/4
印数: 1—2 500 字数: 256 000

定价: 29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

数学是什么？数学是根据某些假设，用逻辑的推理得到结论. 因为是用这么简单的方法，所以数学是一门坚固的科学，它所得到的结论是很有效的.

陈省身

逻辑是属于语言的，它提供一套法则，用以导出更多的词语连接，这也是为了交流真理.

Morrise Kline

随着科学技术的进步，现代数学有了很大的发展. 或者可以在一定程度上反过来说，现代数学的发展为科学技术的进步奠定了基础. 无论怎么说，发展至今的现代数学不仅自身已经是一棵枝繁叶茂的参天大树，而且它深深地扎根于现代科学技术的各个领域，从那里汲取营养，同时也从那里赋予科学技术以活力. 按照美国数学会 2000 年对数学的 MR 分类，除有少数空缺外，其编号已经从 00，01，……一直编到了 90 以上，而且每类又细分为可多达数十种的研究方向. 由此可见现代数学的内容浩如烟海，Euler 时代那种对数学各分支无一不精通的数学家今天已不复存在.

如上所述，现代数学分支繁多，不同分支的研究内容与方法又往往相去甚远，所以要求数学工作者通晓数学的各分支是不现实的. 然而我们认为，无论从事哪种数学分支的研究，在一定程度上了解和掌握数理逻辑的内容与方法都是必要的，因为正如 Morrise Kline 所说的："逻辑是属于语言的，它提供一套法则，用以导出更多的词语连接，这也是为了交流真理."（见文献[21]）这里我们说"在一定程度上了解"，主要指了解数理逻辑引论，即逻辑演算理论，包括命题演算理论和一阶谓词演算理论，因为它不仅是数理逻辑中的公理集合论、模型论、证明论和递归论的共同基础，而且是广大非数理逻辑专家们最为关心的部分. 特别是对于从事计算机专业、应用数学专业和人工智能专业等教学与研究的老师以及在这些专业学习的大学生和研究生，熟悉与掌握逻辑演算理论就是必须的了.

逻辑演算理论是一种有效的工具. 如果熟练地掌握了逻辑演算的方法与技巧，那就为进一步了解和掌握诸如归结原理、逻辑程序设计和定理自动证明等奠定了基础. 这其中对归结原理的方法与技巧的掌握又可直接在学习和研究有重要应用价值的逻辑程序设计与自动推理理论时发挥作用. 如果有一部能通俗地论述逻辑

演算理论并在此基础上清楚而严谨地展开归结原理理论的著作，那对于计算机专业、应用数学专业以及人工智能专业等领域的广大师生和研究人员来说就是非常有使用价值的书籍了. 本书正是向着这个方向努力的一个尝试.

参考文献[12]可以说是一部经典之作，它在详尽地讲述归结原理的基础上介绍了基于 Herbrand 定理的若干证明程序，进而论述了问题求解和程序设计分析等定理自动证明方面的基本内容. 文献[12]是一部好书，也已被国内外大多数同类著作或相关著作所引用. 只是文献[12]侧重于归结原理，对逻辑演算理论的介绍只限于该书的后面要直接用到的部分，对于像前束范式与原公式的可证等价性以及命题演算与谓词演算的完备性等重要内容均未提及，这对希望通过该书学习逻辑演算的读者来说，其内容是远远不够的. 文献[15]对文献[12]作了补充与发挥，但逻辑演算的内容仍然很少. 本书后面的参考文献中凡属数理逻辑内容的都是名家之作，其中对逻辑演算的论述自然是高水准的和正统的. 比如，对命题逻辑完备性的证明采取相容扩张的方法，对一阶谓词逻辑完备性的证明则采用增添可数无穷多个个体常元[1]或增添可数无穷多个变元符号[22]来进行扩张的传统方法. 这些方法当然是严谨的、无懈可击的. 然而对于非数理逻辑专业的读者来说，这些方法似乎过于专业化而不够通俗，加之上述著述中一般均缺少归结原理方面的内容，所以看来我们在上面提出的出版一部能通俗地论述逻辑演算理论并能清楚而严谨地论述归结方法的著作是十分必要的事.

作者从近 10 年来讲授逻辑演算课程的经验中发现：(i)虽然形式化与符号化是数理逻辑的固有特点，然而能少用或能不用的符号就一定要少用或不用. (ii)尽可能地用通俗语言描述抽象的概念十分重要. 比如，在命题演算的语义理论中，如果把赋值映射称为“裁判”，把真值集{0,1}称为“打分表”，把全体赋值之集称为“裁判团”，就会收到相当好的效果，而且还可为多值逻辑语义理论的讲述留下伏笔. (iii)Boole 代数理论是数学专业与计算机等专业的学生应当熟练掌握的基本知识，它与逻辑演算理论又有着深刻的联系，所以从 Boole 代数理论入手证明命题逻辑与一阶谓词逻辑的完备性定理既自然又易于理解. 本书在讲述逻辑演算时充分注意了以上的三个方面. 关于完备性的代数证明早在参考文献[10]中就已经给出，但那里除符号与当前使用的符号不同而外，其中关于一阶逻辑完备性的证明相当分散，读者需要翻阅长达数十页的内容才可最终得出完备性定理来. 本书则较为精练地用商代数的方法给出了一阶逻辑完备性的证明.

“归结原理”译自“Resolution Principle”，文献[15]在§2.5 中专门解释了为何这样翻译. 在文献[3]中则将“Resolution Principle”译为“消解原理”. 本书采用前一种译法. 归结原理是由 J. A. Robinson 于 1965 年提出的，是定理自动证明的重要工具之一[23]. 虽然它有计算量大的缺点，但其形式化的方法仍不断地被成功地应用(参看文献[24,25]). 特别是熟悉了归结原理中的这一套形式化的方法后可以驾轻

就熟地学习与研究在计算机科学中有着重要应用的逻辑程序设计理论[20]等.本书在用通俗化的方法系统地给出逻辑演算理论的基础上尽可能清楚与严谨地讲述了归结原理的基本内容.比如,关于 Herbrand 第 1 定理的证明,文献[12]引用了无法查找出处的 König 引理(只标出“Knuth,1968”,但参考文献中未出现),其他著作则似乎忽略了 König 引理.本书在给出了另外一个引理,即引理 5.5.15 的基础上给出了 Herbrand 第 1 定理的严谨的证明.又如文献[12]在证明 PI 归结方法与锁归结方法的完备性时都是先就基子句的情形作了比较严谨的证明,而向一般情形转化时则使用了“不难证明”或“类似于某某定理的证明”等不很明确的表述.本书则通过引入“保归结扩张”概念和建立相应的引理给出了上述各定理的严谨的证明.再如,要计算一个公式的子句集需要先计算该公式的 Skolem 标准形,而计算 $A\wedge B$的 Skolem 标准形比分别计算 A 与 B 的 Skolem 标准形要复杂许多.文献[12]中在计算若干较复杂的形如 $A\wedge B$ 的公式的子句集时不加声明地改为分别求A 与B 的子句集然后将其合并的方法.本书则在§6.5 中就此进行了专门的论述.另外,本书注意了用尽可能清楚的方式展开所讲的理论.对于一些较难理解的概念与定理,本书通过给出贴切的例子加以说明.比如,关于归结式的提升引理证明很长,不易理解,本书就设计出可以完全与引理的证明相对照的例子(即例 6.4.2),然后再给出提升引理的证明.本书还经常通过“注”的方式阶段性地向读者提醒或小结前一段内容中值得注意的问题,并安排了比较充分的练习题,希望这些能有助于读者对本书内容的理解.

鉴于多值逻辑演算与二值逻辑演算有诸多相似之处,特别是多值逻辑演算理论在不确定性推理方面有较广泛的应用.本书还安排了最后一章,以 Łukasiewicz 逻辑系统与作者引入的 $\mathscr{L}^*$ 系统为例讲述了多值逻辑演算理论,可供读者选用.

本书共分 8 章,第一章讲预备知识,主要是讲 Boole 代数理论.第二章讲命题演算.第三章与第四章分别讲一阶谓词演算的语义理论与语构理论,但不涉及带等词的逻辑理论.本书于第五章较系统地讲述 Skolem 变形和 Herbrand 定理,其中在§5.4 中介绍作者引入的所谓正则函数系统理论,可看作是对 Herbrand 域的一种推广,可供读者参考.第六、七章分别讲述归结原理及其简化方法,最后在第八章中介绍多值逻辑演算理论.只关心逻辑演算理论的读者可以选择本书的前四章,甚至还可以略过第一章,只需在证明命题演算系统 L 与谓词演算系统 $\mathscr{L}$的完备性定理时直接引用命题 1.3.15 即可.

本书曾作为讲义多次向研究生与访问学者讲授过,他们纠正了讲义中的若干笔误并提出过许多好的修改建议.裴道武曾就 $\mathscr{L}^*$ 系统的完备性问题与作者进行过详细的讨论,裴道武与吴洪博分别提出了 $\mathscr{L}^*$ 系统的简化形式,这对本书第八章的形成有直接的帮助.张花荣与周湘南仔细地编写了本书的索引.韩诚和秦晓燕对本书的归结原理部分多次提出了修改意见.研究生宋玉靖、覃锋、任芳、傅丽、王三民、

王向云、李骏、袁和军、王龙春、宋庆燕、兰蓉、常瑶芝、许文艳、苏忍锁、任燕、马小珏、吴静杰、焦烨、罗艳斌、颉永建、郑慕聪，上海师大研究生吴恒洋以及访问学者斯钦孟克、张建华、刘淼、王开民、赵正波、张家禄和袁庆生等在听课过程中都提出过修改建议，这在很大程度上减少了本书原稿中的错误. 然而由于作者水平所限，本书中的疏漏、不妥乃至谬误之处都仍在可能之列，希望各位专家与广大读者不吝赐教.

清华大学应明生教授阅读了本书的部分书稿，并积极推荐本书出版. 四川大学刘应明院士和西安交通大学张文修教授、徐宗本教授也一直关注与支持本书的出版，加之有陕西师范大学优秀学术著作基金的资助和打印社黄新玲女士的高效而细致的工作，所以本书才能较顺利地与读者见面. 作者在此一并表示最诚挚的感谢!

王国俊

2002 年 10 月于陕西师范大学数学研究所

目　　录

第一章　预备知识

按照Bourbaki学派的观点，数学中有三大母结构，即代数结构、拓扑结构与序结构，这三大母结构相互交融形成了数学的多个分支. 本章主要介绍最基本的序结构理论，后半部分也涉及一些代数结构理论，这些知识对理解后面要讲的逻辑演算理论是有帮助的.

§1.1　偏　序　集

§1.1.1　预　序　集

定义 1.1.1　设 X 是非空集，$R\subset X^n$，则称 R 为 X 上的 **n 元关系**. 当 $(x_1,\cdots,x_n)\in R$ 时称 $(x_1,\cdots,x_n)$ 满足关系 R，记作 $R(x_1,\cdots,x_n)=1$，否则称 $(x_1,\cdots,x_n)$ 不满足关系 R，记作 $R(x_1,\cdots,x_n)=0$. 当 $n=2$ 时，$R(x,y)=1$ 也记作 xRy. 当 $n=1$ 时，X 上的一元关系就是 X 的子集.

例 1.1.2　在 $[0,1]$ 上规定 xRy 当且仅当 $y=x^2$，则 R 是 $[0,1]$ 上的二元关系. 一般地，设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是一元函数，则此函数的图像 $R=\{(x,f(x))\mid x\in[0,1]\}$ 是 $[0,1]$ 上的二元关系. 更一般地，设 $f:X^n\to X$ 是 X 上的 n 元函数，则其图像 $R=\{(x_1,\cdots,x_n,f(x_1,\cdots,x_n))\mid(x_1,\cdots,x_n)\in X^n\}$ 是 X 上的 $n+1$ 元关系. 但是反过来，X 上的 $n+1$ 元关系自然不必是 X 上 n 元函数的图像. 比如，在 $[0,1]$ 上规定 xRy 当且仅当 $x\leqslant y$，则 R 是 $[0,1]$ 上的二元关系，它不是 $[0,1]$ 上任何函数的图像.

定义 1.1.3　设 X 是非空集，$\prec$ 是 X 上的二元关系. 如果

(i) $x\prec x\quad(x\in X)$；

(ii) 若 $x\prec y$ 且 $y\prec z$，则 $x\prec z\quad(x,y,z\in X)$.

则称 $\prec$ 为 X 上的**预序**，称 $(X,\prec)$ 为**预序集**. 条件(i) 和(ii) 分别称为 $\prec$ 的反身性和传递性.

例 1.1.4　(i) 设 X 是欧氏平面 $\mathscr{R}^2$ 上的全体三角形之集. 以 $m(x)$ 记三角形 x 的面积，规定 $x\prec y$ 当且仅当 $m(x)\leqslant m(y)$，即 x 的面积不超过 y 的面积，则 $\prec$ 是 X 上的预序，$(X,\prec)$ 是预序集.

(ii) 设 $\mathscr{P}_f(\mathscr{N})$ 是自然数集的一切有限子集之集，设 $A\in\mathscr{P}_f(\mathscr{N})$，以 $|A|$ 记 A 中元的个数，规定 $A\prec B$ 当且仅当 $|A|\leqslant|B|\ (A,B\in\mathscr{P}_f(\mathscr{N}))$，则 $(\mathscr{P}_f(\mathscr{N}),\prec)$ 是预序

集.

(iii) 设 $\mathscr{R}$ 是实数集. 以 $|x|$ 表示 x 的绝对值, 规定 $x \prec y$ 当且仅当 $|x| \leqslant |y|$ $(x, y \in \mathscr{R})$, 则 $(\mathscr{R}, \prec)$ 是预序集.

§1.1.2 偏 序 集

定义 1.1.5 设 $(P, \prec)$ 是预序集, 若 $\prec$ 除满足反身性和传递性外还满足反对称性, 即

$$\text{当 } x \prec y \text{ 且 } y \prec x \text{ 时 } x = y,$$

则称 $\prec$ 为 P 上的偏序, 称 $(P, \prec)$ 为**偏序集**. $x \prec y$ 读作"x 小于或等于 y"或"y 大于或等于 x"或"x 不大于 y"或"y 不小于 x". 若对 P 中任二元 x 与 y 必有 $x \prec y$ 或 $y \prec x$ 之一成立, 则称 $(P, \prec)$ 为**全序集**.

例 1.1.6 (i) 例 1.1.4 中的三个预序集都不是偏序集.

(ii) 设 P 是欧氏平面 $\mathscr{R}^2$ 上的全体三角形之集, 对任二个三角形 x 与 y, 规定 $x \prec y$ 当且仅当 x 包含于 y 之中, 则 $(P, \prec)$ 是偏序集. 一般地, 设 $\mathscr{P}(X)$ 是 X 的幂集, 对 X 的任二子集 A 与 B, 规定 $A \prec B$ 当且仅当 $A \subset B$, 则 $(\mathscr{P}(X), \subset)$ 是偏序集. 这里 $A \subset B$ 表示当 $x \in A$ 时有 $x \in B$.

(iii) 以 $C[0,1]$ 记 $[0,1]$ 上的连续函数之集. 设 $f, g \in C[0,1]$, 规定 $f \prec g$ 当且仅当对每个 $x \in [0,1]$ 均有 $f(x) \leqslant g(x)$, 则 $(C[0,1], \prec)$ 是偏序集.

(iv) 设 $\prec$ 为 $\mathscr{R}$ 上通常的序 $\leqslant$, 则 $(\mathscr{R}, \prec)$ 是偏序集, 而且是全序集. 又, 设 $\mathbf{C}$ 为全体复数之集. 规定 $a + bi \prec c + di$ 当且仅当 $a < c$ 或 $a = c$ 且 $b \leqslant d$, 则 $(\mathbf{C}, \prec)$ 是全序集. 但若规定 $a + bi \prec c + di$ 当且仅当 $a \leqslant b$ 且 $c \leqslant d$, 则 $(\mathbf{C}, \prec)$ 仅构成偏序集, 不构成全序集.

(v) 在以下各图中, P 是黑点构成之集, 规定位置较低的点不大于位置较高的点, 也不大于自身, 则各图中的 P 都是偏序集.

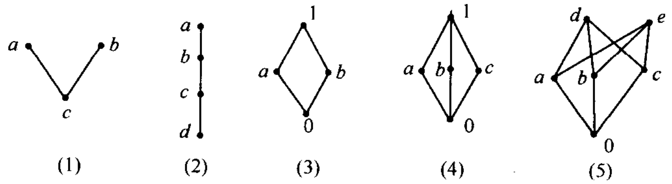

图 1.1

以下常将 P 上的偏序 $\prec$ 记为 $\leqslant$.

§1.1.3 界与确界

定义 1.1.7 设$(P,\leqslant)$为偏序集,$X\subset P$,$a\in P$.如果当 $x\in X$ 时有 $x\leqslant a$($x\geqslant a$),则称 a 为X 的**上(下)界**.设 a 是X 的上(下)界,若对 X 的任一上(下)界 b 均有$a\leqslant b$($a\geqslant b$),则称 a 为X 的**上(下)确界**.a 是X 的上(下)确界记作 $a=\sup X$($a=\inf X$)或 $a=\bigvee X$($a=\bigwedge X$).

例 1.1.8 (i) 在图 1.1(1)中,$\{a,b\}$有下确界 c,但没有上界.在图 1.1(2)中$\{a,b,c\}$的上、下确界分别是 a 和c.在图 1.1(5)中,$X=\{a,b,c\}$有下确界 0,X 有两个上界d 与e,但没有上确界.

(ii) 在偏序集$(\mathscr{P}(X),\subset)$中,设$\{A_i\mid i\in I\}\subset\mathscr{P}(X)$,则$\{A_i\mid i\in I\}$的上、下确界都存在,就是$\{A_i\mid i\in I\}$中各集的并与交,即 $\sup\{A_i\mid i\in I\}=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$,$\inf\{A_i\mid i\in I\}=\bigcap\limits_{i\in I}A_i$.

(iii) 在 $C[0,1]$中,设 $X=\{h\mid h(x)=x^n,n=1,2,\cdots,\}$,则 $\sup X=f$,这里 $f(x)=x$($x\in[0,1]$).$\inf X=g$,这里 $g(x)=0$($x\in[0,1]$).如果放弃函数的连续性,则 $\sup X=f$ 仍成立,但当 $x\in[0,1)$时$(\inf X)(x)=0$,且$(\inf X)(1)=1$.又,设 $Y=\{\overline{m}\mid m\in Z\}$,这里 $\overline{m}$ 是在$[0,1]$上取常值 m 的函数(m 为整数),则 Y 既无上界,也无下界.

(iv) 设 $P=[0,1]$,$\leqslant$是通常序,X 为空集,则 $\sup X=0$,$\inf X=1$.这是因为空集以 P 中的每个元为上(下)界,上确界作为最小上界当然是 0 了,而下确界作为最大下界当然是 1(注意,条件"当 $x\in\varnothing$时 $x\leqslant a$(或 $x\geqslant a$)"对 P 中每个a 都成立).

§1.1.4 定向集

定义 1.1.9 预序集$(X,\prec)$的子集 Y 叫X 的**定向子集**,若对 Y 中任二元a 与b,存在 Y 中的元c 使$a\prec c$ 与$b\prec c$ 都成立,特别当 $Y=X$ 时称$(X,\prec)$为**定向集**.

例 1.1.10 (i) 例 1.1.4 中的三个预序集,例 1.1.6(ii),(iii),(iv) 中的偏序集以及例 1.1.8(ii),(iii),(iv) 中的偏序集都是定向集.

(ii) 有最大元的偏序集是定向集,全序集也是定向集.

(iii) 考虑例 1.1.6(ii) 中的偏序集$(P,\leqslant)$,设 X 是一切包含于以原点为中心的单位圆内的全体三角形构成的P 的子集,则 X 不是P 的定向子集.事实上,任取单位圆的一条直径作为底边,任取不在此直径上的两个点为顶点作两个三角形,则

单位圆中没有同时大于或等于这两个三角形的三角形.

(iv) 设 X 是无穷集,$\mathscr{P}_f(X)$是由 X 的一切有限子集构成的集族,则$(\mathscr{P}_f(X),\subset)$是定向集.

(v) 设 X 是非空集,$\mathscr{F}(X)$是 X 的一切模糊子集构成的集族,即 $\mathscr{F}(X)=\{f\mid f:X\to[0,1]$是映射$\}$,$\mathscr{F}(X)$上的偏序$\leqslant$为点式序,即,$f\leqslant g$ 当且仅当对每个 $x\in X$均有$f(x)\leqslant g(x)$,则$(\mathscr{F}(X),\leqslant)$为偏序集.以 $\mathscr{F}_<(X)$记在 X 中各点处的隶属度均小于 1 的模糊集 f(即,对每个 $x\in X$ 均有 $f(x)<1$)之族,则 $\mathscr{F}_<(X)$是$\mathscr{F}(X)$的定向子集,以 $\mathscr{F}_0(X)$记仅在 X 中有限多个点处的隶属度不为 0 的模糊集之集,则 $\mathscr{F}_0(X)$也是 $\mathscr{F}(X)$的定向子集.

习 题 一

1. 试举两个不是偏序集的预序集的例子.

2. 设$(\mathscr{U},\subset)$是实直线 $\mathscr{R}$ 中的全体开集按包含序所成的偏序集,

$$X=\left\{\left(-2-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)\middle|\, n=1,2,\cdots\right\},$$

求 $\sup X$ 和 $\inf X$. 一般地,设 $\mathscr{A}$ 是一族开集,问 $\sup\mathscr{A}=\bigcup\{A\mid A\in\mathscr{A}\}$ 与 $\inf\mathscr{A}=\bigcap\{A\mid A\in\mathscr{A}\}$是否成立?

3. 举一个没有最大元且不是全序集的定向偏序集的例子.

§1.2 格

§1.2.1 格

定义 1.2.1 设$(L,\leqslant)$是偏序集,如果对 L 中任意一对元 a 与 b,$\sup\{a,b\}$与 $\inf\{a,b\}$恒存在,则称$(L,\leqslant)$为**格**. $\sup\{a,b\}$与 $\inf\{a,b\}$常分别记为 $a\vee b$ 与 $a\wedge b$.

下面的命题是容易证明的:

命题 1.2.2 设$(L,\leqslant)$是格,则

(i) 设 X 是L 的非空有限子集,则 $\sup X$ 与 $\inf X$ 都存在.

(ii) $a\vee b=b\vee a, a\wedge b=b\wedge a$.

(iii) $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c),(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$.

(iv) $a\leqslant b$ 当且仅当$a\vee b=b$ 当且仅当$a\wedge b=a$.

这个命题的证明留给读者.

定义 1.2.3 设$(L,\leqslant)$是偏序集,如果对 L 的任意子集 X,$\sup X$ 与 $\inf X$ 都

存在,则称$(L,\leqslant)$为**完备格**.

完备格有最大元,即 $\sup L$,记作 1_L,在不致混淆时也简记为 1. 完备格也有最小元,即 $\sup\varnothing$,记作 0_L,在不致混淆时也简记为 0.

例 1.2.4 (i) $(\mathscr{R},\leqslant)$是格,但非完备格.$([0,1],\leqslant)$是完备格.一般地,全序集一定是格,因为 a 与 b 的上、下确界分别是 a 与 b 中的较大者和较小者.仅含两个元 0 与 1 的全序集$\{0,1\}$是格.

(ii) $(\mathscr{P}(X),\subset)$是完备格.$(\mathscr{F}(X),\leqslant)$也是完备格.

(iii) 设$(L,\leqslant)$是格,且 L 有限,则$(L,\leqslant)$是完备格.为此只需证明 L 的空子集有上、下确界.事实上,有限格有最大元 1 和最小元 0,所以 $\sup\varnothing=0$ 与 $\inf\varnothing=1$ 都存在.

(iv) 图 1.1 中的(2),(3),(4)都是格,当然也都是完备格.

§1.2.2 分 配 格

定义 1.2.5 设$(L,\leqslant)$是格,如果对 L 中的任意元a,b,c 有

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c), \tag{1.2.1}$$

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c), \tag{1.2.2}$$

则称$(L,\leqslant)$为**分配格**.

在未给出分配格的例子之前,我们先证明几个常用的命题.

命题 1.2.6 设$(L,\leqslant)$是格,如果(1.2.1)式与(1.2.2)式之一成立,则另一个也成立,从而$(L,\leqslant)$是分配格.

证明 设(1.2.1)式成立,以下证明(1.2.2)式也成立.事实上,因为 $a\leqslant a\vee b$,$a\wedge c\leqslant a$,所以由命题 1.2.2(iv) 得$(a\vee b)\wedge a=a$,$a\vee(a\wedge c)=a$.那么由(1.2.1)式得

$$\begin{aligned}(a\vee b)\wedge(a\vee c)&=((a\vee b)\wedge a)\vee((a\vee b)\wedge c)=a\vee((a\vee b)\wedge c)\\&=a\vee(a\wedge c)\vee(b\wedge c)=a\vee(b\wedge c).\end{aligned}$$

这就证明了(1.2.2)式.类似可证若(1.2.2)式成立则(1.2.1)式也成立.

命题 1.2.7 设$\{(L_i,\prec_i)\mid i\in I\}$是一族预序集,$I\neq\varnothing$.令 $L=\prod\limits_{i\in I}L_i$ 为各 L_i 的乘积.在 L 上规定

$$(a_i)_{i\in I}\prec(b_i)_{i\in I}\quad \text{当且仅当对每个 } i\in I, a_i\prec_i b_i, \tag{1.2.3}$$

则

(i) $(L,\prec)$是预序集.

(ii) 若每个$(L_i,\prec_i)$都是偏序集,则$(L,\prec)$也是偏序集.

(iii) 若每个$(L_i,\prec_i)$都是格(完备格),则$(L,\prec)$也是格(完备格).

(iv) 若每个$(L_i,\prec_i)$都是分配格,则$(L,\prec)$也是分配格.

$(L,\prec)$叫做各$(L_i,\prec_i)$的**乘积**.由(1.2.3)式定义的 L 上的序$\prec$叫做**点式序**.

证明 (i) 和(ii) 是显然的.设$(L_i,\prec_i)$是格$(i\in I)$,$(a_i)_{i\in I}$和$(b_i)_{i\in I}$是L 中任二元,则由(1.2.3)式知

$$(a_i)_{i\in I}\vee(b_i)_{i\in I}=(a_i\vee b_i)_{i\in I}, \tag{1.2.4}$$

$$(a_i)_{i\in I}\wedge(b_i)_{i\in I}=(a_i\wedge b_i)_{i\in I}, \tag{1.2.5}$$

所以$(L,\prec)$是格.类似可证若$(L_i,\prec_i)$是完备格$(i\in I)$,则$(L,\prec)$也是完备格.所以(iii) 成立.最后,若$(L_i,\prec_i)$是分配格$(i\in I)$,由(1.2.4)式与(1.2.5)式得

$$\begin{aligned}(a_i)_{i\in I}\wedge((b_i)_{i\in I}\vee(c_i)_{i\in I})&=(a_i\wedge(b_i\vee c_i))_{i\in I}\\&=((a_i\wedge b_i)\vee(a_i\wedge c_i))_{i\in I}\\&=((a_i)_{i\in I}\wedge(b_i)_{i\in I})\vee((a_i)_{i\in I}\wedge(c_i)_{i\in I}),\end{aligned}$$

所以$(L,\prec)$是分配格.

命题 1.2.8 全序集是分配格.

证明 设$(L,\leqslant)$是全序集,$a,b,c\in L$,不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$.则由 $a\wedge(b\vee c)=a\wedge c=a$ 和$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=a\vee a=a$ 知(1.2.1)式成立,所以$(L,\leqslant)$是分配格.

例 1.2.9 (i) $(\mathscr{R},\leqslant)$与$([0,1],\leqslant)$是分配格.

(ii) $(\mathscr{F}(X),\leqslant)$是分配格.事实上,$\mathscr{F}(X)=\prod\limits_{i\in X}L_i$,这里 $L_i=[0,1](i\in X)$,且由例 1.1.10(v) 知$\leqslant$恰为命题 1.2.7 中的点式序,所以$(\mathscr{F}(X),\leqslant)$是分配格.

(iii) $(\mathscr{P}(X),\subset)$是分配格,即

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C). \tag{1.2.6}$$

事实上,以第一式为例,$x\in A\cap(B\cup C)$当且仅当 $x\in A$ 且“$x\in B$ 或$x\in C$”,即,当且仅当$x\in A$且$x\in B$ 或$x\in A$ 且$x\in C$.这表示 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.所以$(\mathscr{P}(X),\subset)$是分配格.

(iv) 在图 1.1 中,(2)和(3)都是分配格,但(4)不是分配格.事实上,$a\wedge(b\vee c)=a\wedge 1=a$,但$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=0\vee 0=0\neq a$,所以(1.2.1)式不成立.

§1.2.3 无限分配律

定义 1.2.10 设$(L,\leqslant)$是完备格,分别称以下的(1.2.7)式与(1.2.8)式为**第一无限分配律与第二无限分配律**:

$$a\wedge(\bigvee_{i\in I}b_i)=\bigvee_{i\in I}(a\wedge b_i), \tag{1.2.7}$$

$$a\vee(\bigwedge_{i\in I}b_i)=\bigwedge_{i\in I}(a\vee b_i). \tag{1.2.8}$$

例 1.2.11 (i) 容易直接验证$(\mathscr{P}(X),\subset)$满足两个无限分配律.

(ii) $(\mathscr{F}(X),\leqslant)$也满足两个无限分配律,因为易证完备的全序集(特别是$[0,1]$)满足两个无限分配律,所以可仿命题 1.2.7 证明$(\mathscr{F}(X),\leqslant)$满足两个无限分配律.

(iii) 设$(\mathscr{U},\subset)$是$\mathscr{R}$上的全体开集按包含序构成的偏序集,则$\mathscr{U}$是完备格.因为任意多个开集之并仍为开集,所以它就是这些开集的上确界.又,这些开集作为集合取交后再取内部,就得到这些开集的下确界,即

$$\sup\mathscr{A}=\bigcup\mathscr{A},\quad \inf\mathscr{A}=(\bigcap\mathscr{A})^{\circ},\quad \mathscr{A}\subset\mathscr{U},\mathscr{A}\neq\varnothing. \tag{1.2.9}$$

对于$\mathscr{A}=\{A,B\}$的情形则有$A\wedge B=A\cap B$,因为每个开集之交为开集,它等于自己的内部.这时有

$$A\wedge(\bigvee_{i\in I}B_i)=A\cap(\bigcup_{i\in I}B_i)=\bigcup_{i\in I}(A\cap B_i)=\bigvee_{i\in I}(A\wedge B_i).$$

所以$(\mathscr{U},\subset)$满足第一无限分配律,但$(\mathscr{U},\subset)$不满足第二无限分配律.事实上,设$A=(0,1)$,

$$B_n=(1-\frac{1}{n},2)(n=1,2,\cdots),$$

则

$$\wedge\{B_n\mid n=1,2,\cdots\}=(\bigcap_{n\in\mathscr{N}}B_n)^{\circ}=[1,2)^{\circ}=(1,2),$$

所以

$$A\vee(\bigwedge_{n\in\mathscr{N}}B_n)=(0,1)\cup(1,2)=(0,2)-\{1\}.$$

但对每个$n\in\mathscr{N}$,$A\vee B_n=(0,2)$,所以$\bigwedge_{n\in\mathscr{N}}(A\vee B_n)=(0,2)\neq A\vee(\bigwedge_{n\in\mathscr{N}}B_n)$.

§1.2.4 滤子与理想

定义 1.2.12 设$(L,\leqslant)$是格,F是L的非空子集.如果

(i) F是**上集**,即,当$a\in F$且$a\leqslant b$时有$b\in F$.

(ii) F是**下定向集**,即,当$a,b\in F$时有$c\in F$使$c\leqslant a$且$c\leqslant b$.

则称F为L中的**滤子**.当$F\neq L$时,称F为**真滤子**.以后不声明时恒设F为真滤子.

(iii) 如果真滤子F还满足条件当$a\vee b\in F$时有$a\in F$或$b\in F$,则称F为**素滤子**.

注 1.2.13 显然上面的条件(ii) 可换为

(ii)′当$a,b\in F$时$a\wedge b\in F$.

定义 1.2.14 设$(L,\leqslant)$是格,I是L的非空子集.如果

(i) I是**下集**,即,当$a\in I$且$b\leqslant a$时有$b\in I$.