

中学数学思维方法丛书

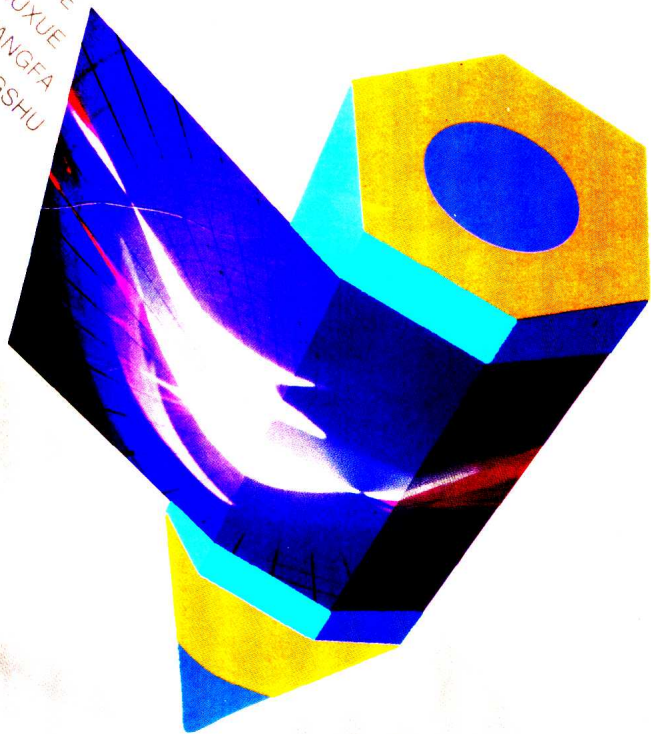
原则与策略

杨世明 编著

YUANZEYUCELUE
YANGSHIMING

ZHONGXUESHUXUESIWEIFANGFACONGSHU

ZHONGXUE
SHUXUE
SIWEIFANGFA
CONGSHU



大象出版社

中学数学思维方法丛书

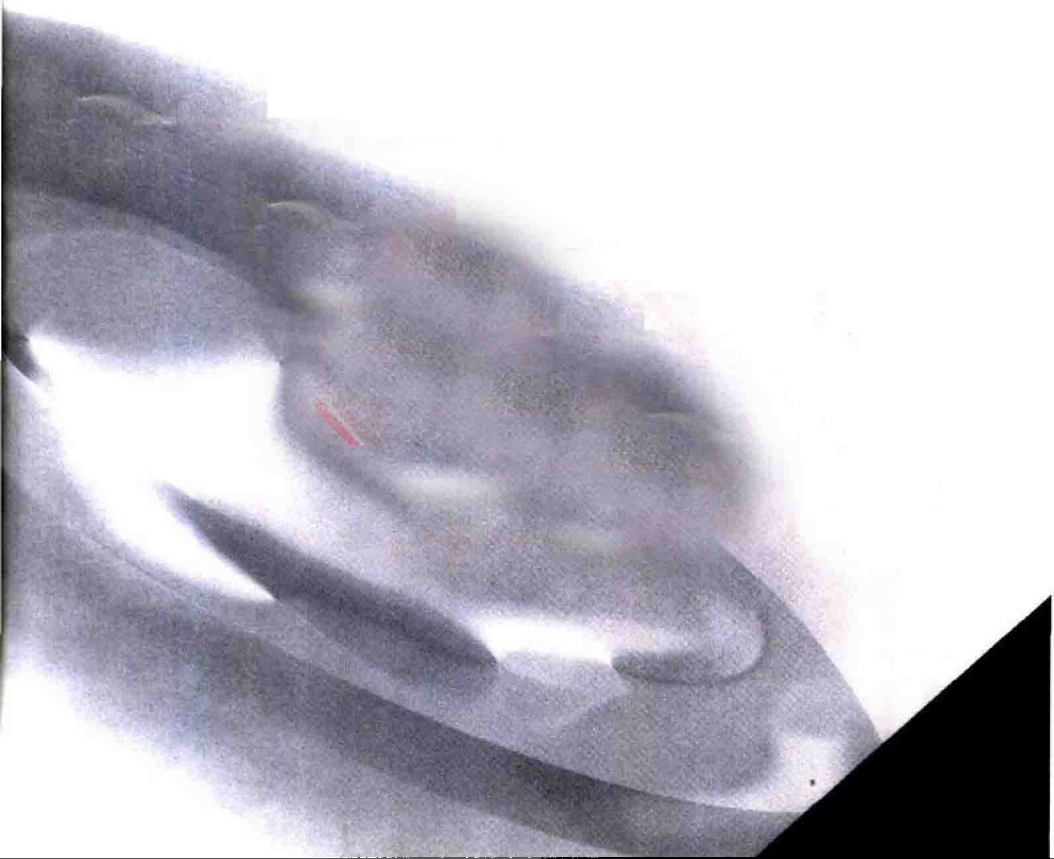
原则与策略

杨世明 编著

大象出版社

YUANZEYUCELUE

YANGSHIMING



图书在版编目(CIP)数据

中学数学思维方法丛书:原则与策略/王梓坤,张乃达主编;杨世明编著. - 郑州:大象出版社,1999

ISBN 7-5347-2338-8

I. 中… II. ①王… ②张… ③杨… III. 数学课 - 思维方法 - 中学 IV. G634.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 25882 号

责任编辑 孟会祥	责任校对 范秀娟
大象出版社出版(郑州市农业路 73 号 邮政编码 450002)	
新华书店经销 河南省瑞光印务股份有限公司印刷	
开本 850 × 1168	1/32 印张 6.75 字数 146 千字
1999 年 9 月第 1 版	1999 年 9 月第 1 次印刷
印数 1—2 500 册	定 价 7.55 元

若发现印、装质量问题,影响阅读,请与承印厂联系调换。

印厂地址 郑州市二环路 35 号

邮政编码 450053

电话 (0371)3822319

中学数学思维方法丛书

主 编 王梓坤 张乃达
编 委 (以姓氏笔画为序)
王梓坤 过伯祥 杨世明
张乃达 蒋 声
本册作者 杨世明

序

早在 1995 年 8 月,大象出版社(原河南教育出版社)在扬州举办了一个座谈会,邀请十余位教学水平很高的数学教师参加,商讨出版一套“中学数学思维方法丛书”。与会同仁认为,这是一个富有创见的倡议,因而得到大家热烈赞许。提供一套既有较深厚的理论基础,又富有文采和启发性、可读性的关于数学思维的参考书,对中学数学教学,无疑会是非常有益的;而更主要的,广大的中学生们,将在形象思维、逻辑推理和严密计算等方面,学到很多的东西。这对将来无论做什么工作,都会受益无穷。

回想我们青少年时期学习数学的情景,总会有几分乐趣几分惊异。做出了几道难题是乐趣,而惊异则来自方法的进步。记得小学算鸡兔同笼,必须东拼西凑,多一只兔便比鸡多了两条腿,好不容易才能做出一题。而学过代数,这类问题便变得极为简单。做几何题也一样,必须具体问题具体解决,而学过解析几何后便有了一般的

程序可循。至于算圆的面积,如果不用积分便会相当麻烦。由此可见,方法的进步对科学的发展是何等重要。以上是对学习现成的东西而言。如果要进行科研,从事创新、发现或发明,那就更应重视方法,特别是思维方法。没有新思想,没有新方法,要超过前人是很难的。有鉴于此,一些优秀的数学家便谆谆告诫学生们,要非常重视学习方法和研究方法。美国著名数学家 G. Pólya 写过好几本关于数学思想方法的书,如《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》,后来都成为世界名著,很受欢迎。

学习任何一门科学,都有掌握知识和培养能力两方面。一般说来,前者比较容易。因为知识已经成熟,而且大都已经过前人整理,成为循序渐进的教材。但能力则不然,那是捉摸不定、视之无形的东西,主要靠自己去思考,去探索,去总结,去刻苦锻炼。老师的培养固然重要,但只能起辅导作用。只可意会,不可言传,而有时甚至连意会都做不到。正如游泳,只靠言传是绝对学不会的。这是对受业人而说的。

至于老师,则应无保留地传授自己的经验和体会,尽量缩短学生学习的时间。中国有句古诗:“鸳鸯绣出凭君看,不把金针度与人。”意思是说知识可以输出,但能力不可传授。前一句话意思很好,后一句应改为“急把金针度与人”。这套丛书,正是专门传授金针的。

一般的科学研究方法,可分为演绎与归纳两大类。在数学中,演绎极为重要,而归纳则基本上用不上,除了 C. F. Gauss 等人偶尔通过观察数列以提出一些数论中的猜想而外。不过自从计算机发明后,这种情况已大为改

观。混沌学主要靠计算机而发展起来,数学模拟也主要靠计算机。再者,以往数学中极少实验,还是由于计算机的广泛使用,现在不少数学系已有了实验室,特别是统计实验室。可以期望,计算机对改变数学的面貌,对改善数学的思维方法,都会起到越来越大的作用。

在此之前,我国已经出版了几本关于数学方法的书,它们都各有特色。如就规模之大,选题之广,论述之精而言,这套丛书也许是盛况空前、蔚为大观的。我们希望它在振兴我国的科学事业和培养数学人才中,将会起到令人鼓舞的作用。

王梓坤

99.7.6.

数学思维原则——策略表

一、思维启动原则

是什么引起了思维？

I. 问题性原则：你应当有一个问题。

你对此有什么看法？它是正确的吗？你想解决这个问题吗？

II. 目的性原则：你应当明确自己的目的。

你这样做的目的是什么？你是否有一个明确的目标？怎样达到这个目标？可能会有什么困难？

III. 趣味性原则：你应当对它感兴趣。

你觉得它很奇妙吗？你了解它吗？你觉得这问题有趣吗？你特别喜爱这问题吗？

IV. 操作性原则：为了求得切身体验，你应当动手做。

你弄清了这个问题吗？你理解了这个概念吗？你能举出它的一些特例加以验证吗？试画一个图或做个模型加以检验。

二、数学思维特征原则

V. 抽象化原则:你应当透彻地分析问题,舍其质而抓其量,并加以逻辑地构造.

这问题从数学上看,实际上是个什么问题?它有哪些数量?这些数量间有什么关系?

VI. 符号化原则:你应当引进适当的符号系统,依之把问题完整地表述出来,尽可能用符号来思考、操作,弄清这一套符号的规律.

问题是否关联着一个图形?试画出来;引进一组适当的符号,你能用符号把已知、未知和条件(题设和结论)完整表述吗?你引进的这一组符号合适吗?反映出什么规律?

VII. 严谨化原则:每做一步,都要有根据,要把“猜想”和真命题严加区分.

这一步是正确的吗?若正确,你能证明吗?若不正确,你能举出反例吗?这结论的依据是什么?

三、思维过程的监控原则

VIII. 动因原则:你应当弄清问题症结,寻求一个好念头,迈出下一步.

这一点意味着什么?为什么要这样做?这结果说明了什么?是什么促使你这样做的?

IX. 审美原则:你应当追求更简洁、完美的结果,寻求更好的解法.

这结果是否简单、漂亮、合用?这解法是否自然、新奇、巧妙?有无更好的解法?有无更简单的步骤?

X. 反思原则:应经常对思维过程和结果进行回顾.
这求解过程是否有问题? 有无其他解法? 有无更好的解法? 这方法或结果可能用在别的题目上吗?

四、常规思维策略

第一建议:你应当首先、完整地学会常规思维.

五、归纳思维策略

第二建议:面对难题,你应当用合情与演绎推理相结合的方法,探索前进.

六、变换思维策略

第三建议:如果问题难以直接求解,就变换成另一个问题.

七、模块思维策略

第四建议:你应当随时注意筛选和积累典型问题研究的一般思维过程和具体处理方法,以备整体运用.

八、辩证思维策略

第五建议:你应当辩证地看待数学中的各种问题.

目 录

第一部分 数学思维的基本原则

- 一、是什么引起了思维? (3)
- 思维启动原则
1. 从一则寓言谈起 (3)
2. 怎样阅读? 怎样聆听? (5)
3. 两种思维 (10)
4. 思维启动四原则 (13)
- I. 问题性原则(13) II. 目的性原则(16)
- III. 趣味性原则(16) IV. 操作性原则(21)
5. 四条原则的关系 (25)
- 二、怎样“数学地”思考问题? (28)
- 数学思维特征原则
1. 欧拉“过桥”的故事 (28)
2. 数学思维特征三原则 (36)
- V. 抽象化原则(36) VI. 符号化原则(40)
- VII. 严谨化原则(46)

3. 三条原则的相互关系	(54)
三、怎样使思维顺畅地前进?	(58)
——思维过程的监控原则	
1. 一道算术题与一道几何题	(58)
2. 思维监控三原则	(70)
VIII. 动因原则(71) IX. 审美原则(78)	
X. 反思原则(81)	
3. 思维过程监控诸原则的关系	(86)

第二部分 中学数学思维策略

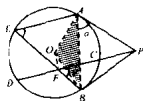
四、常规思维策略	(91)
1. 从波利亚的“解题表”谈起	(91)
2. “急转弯”与多发病	(97)
3. 全程例说	(105)
4. 学会“常规”为上策	(110)
五、归纳思维策略	(113)
1. “点线距公式”探索的启示	(114)
2. 深入一步	(120)
3. 合情推理就在你身边	(122)
4. “归纳思维策略”小注	(129)
六、变换思维策略	(131)
1. 常规“小题”寓哲理	(132)
2. 化归——数学家特有的思维方式	(135)
3. 变换种种	(141)
4. 变换溯源	(150)
七、模块思维策略	(152)

1.思维的简约与加速	(153)
2.积累数学思维模块	(159)
3.见微知著,联想模块	(167)
4.模块思维须知	(175)
八、辩证思维策略	(176)
1.大事关己	(177)
2.数学的本性	(179)
3.须臾难离的无限	(184)
4.数学解题“策略”综观	(197)

第一部分

数学思维的基本原则





一、是什么引起了思维？

——思维启动原则

大千世界，异彩纷呈。

我们置身其中，不能不关心身边的事物，甚至对极其纷繁复杂的现象，不畏琐细和艰巨，进行深入地思考，这是为什么？到底是什么引起了我们的思维？

1. 从一则寓言谈起

我国有一则脍炙人口的寓言故事，大致是说：

小聪七岁进了学堂。第一天，老师在黑板上画一道，说：“这是一”；第二天，老师在黑板上画两道，说：“这是二”。第三天，小聪背书包上学，边走边想：今天一定学“三”。上课了，小聪瞪大眼睛听老师讲课，果然，老师在黑板上画了三道：“三”，说：“这是三”。小聪高兴极了。

回到家,小聪告诉父母:“我学成了”,父母也非常高兴.这天,邻居求小聪帮助写封信.事儿不多,小聪答应了,回到自己屋里写起来.

一小时过去了,又一小时过去了,邻居等得不耐烦.大家到小聪屋里一看,呀!吓了一跳:满世界飞舞着画了横道的纸条,小聪还在忙活着……

邻居一想,笑了:“呵,我不该叫万千一呀!”

往常,人们都把这则寓言当做一个笑话,让好耍小聪明的孩子引以为戒.我们怎么看?

——事实上,故事寓意很深.比如,老师安排一道“一”,二道“二”,三道“三”这样有规律的教学内容,意欲引出学生的联想.这里虽然出现“四道四”的误导,毕竟还是引出了联想、猜测.

——仅对汉字来说,是误导.对我国古代算筹数字,“四道四,五道五”,仍然对,超过五,才改用 \perp 、 \perp 等等,后来采用位值制,更是经历了漫长的岁月.小聪识字的过程,正是人类“识数”历史的重演.

——小聪猜想中的问题,说明引进数字“四、五……百、千、万……”的必要性,可是记数的进一步的需要,还要再回到用少数符号,辅以位值制、方幂等方式.

但我们关心的是另一层意思:规律性的教学内容,引导小聪去猜想,可直到满世界纸条他仍然在干,而不肯怀疑自己:这样做行吗?有无简单写法?——这,到底是为什么?

自然,我们不是在责备一个7岁的孩子.数学史上曾一再出现像小聪一样“一条道跑到黑”的事:在罗巴切夫斯基以前,人们对欧氏第五公设的研究,在证明“尺规不能三等分一个 20° 的角”以前,人们对“三等分任意角”问题的研究,都曾陷入“满世界飞舞纸条”