lilunyushijian

王锦彪 王满堂 莫海长 宋燕飞 编著

甘肃科学技术出版社

计算机编排课表的理论与实践

计算机编排课表的理论与实践

王锦彪　王满堂　莫海长　宋燕飞　编著

甘肃科学技术出版社

责任编辑：刘俭云
封面设计：钟　嵘
版式设计：陈安庆

计算机编排课表的理论与实践
王锦彪　王满堂　莫海长　宋燕飞　编著

甘肃科学技术出版社出版发行
（兰州第一新村81号）
西北师大印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/16　印张 17.5　插页2　字数401,000
1991年2月第1版　1991年2月第1次印刷
印数：1—5000

ISBN 7-5424-0328-1/TP·2　　定价：6.55元

认真实行计算机辅助教学管理，大力促进我省教育事业的发展

王松山
一九九〇年元月

代 序

今年元旦前夕，受甘肃省科委和教委的委托，我主持了《K 3108课表编排系统》的技术鉴定。当时，就给我留下一种与众不同的感觉。

尽管 C.C. Gotlieb 在1963年就提出过课表编排的数学模型，可是人们几乎一直在经验的长河里漂泊。1975年，S. 艾温从理论上证明课表问题是NP—完全的以来，虽然阐明了这个问题的学术地位与难度，可是却使不少教务家和计算机工作者对此问题望而却步。人人皆知，缺乏科学理论指导下的实践，犹如大海中无舵的小船，很难能侥幸地漂泊到遥远的彼岸。课表编排问题。实质上是一个时空的有限组合问题。通过模糊的课表编排过程使明确的教学计划化为明确的教学指令性安排——课表，对于这样一个已属人文系统行为的规划问题，数值的精确计算在本质上已无法反映人类思维过程的复杂性。为此，必须处理带有模糊约束条件下的组合规划问题。这个课题，正是由于将S. 艾温提出的经典组合规划改造成模糊组合规划；把最优解改造为合理解；为了摆脱组合爆炸的“魔影”，探求坍缩的规律和条件，运用24通道光路模型才为课表编排问题提供了无冲突空间；为了适应环境变化所带来的附加奖惩法则，系统构筑了“弹性模型库”，不仅有效地压缩了库容，而且“懂得”随着排课环境的变更，废弃无用的方案子集，增强了系统的自适应功能……这个闪耀着独创色彩的课题朴实无华地在PC—系列机上，运用 Foxbase + (2.1) 为背景开发出的软件已在全国18所院校里运行，赢来了省内外的同声赞许，就当然不是没有道理的了。

鉴定之余，我多次向课题的开发者、西北师大物理系的王锦彪老师、教务处副处长王满堂同志等细谈了想请他们将此科研成果写成一本理论指导实践新书——《计算机编排课表的理论与实践》的想法，谁知不到一年，就实现了我的初衷。如今，这本书已由甘肃科学技术出版社出版，令我深感快慰。当我作为本书的第一位读者审读完这本佳作时，除了感到内容清新、简炼、充实之外，尤为作者无私奉献的精神所叹服。他们将〈K 3108〉2.0 版本的全部源程序汇编成册公开发表于本书之中，为推动祖国计算机事业表现出了高尚的情操。我深信，这本书的问世，必将促进繁杂的课表编排工作朝着现代科技指导的路子迈进，从而为高校的教务工作做出贡献。

甘肃省电子计算机办公室

张问骅

1990年元旦·金城

前　言

目前，随着微型计算机在各个领域越来越广泛的使用，高校计算机编排课表的研究也活跃起来。这个课题吸引了许多计算机专家的关注，并出现了计算机专业人员与有经验的课表编排专家密切合作的局面。这个课题之所以越来越引起人们的重视是因为它兼有实际应用的意义和理论探讨的价值。高校人工编排课表越来越难适应教育事业的迅速发展，使用计算机编排课表是广大教务管理人员的普遍愿望。国外从五十年代末就开展了这个课题的研究，七十年代中期证明了课表问题是 NP 完全的。众所周知， NP 完全问题是否是难解的这一问题是当代数学和计算机科学中尚未解决的最重要问题之一。尽管大多数研究工作者猜想 NP 完全问题是难解的，然而在证明或否定这个广泛的猜想方面几乎没有取得什么进展。但是，即使没有证明 NP 完全蕴含难解性，知道一个问题是 NP 完全的至少暗示着要想用多项式时间算法解这个问题必须有重大的突破。”[3]

我们对这一课题的研究开始于1985年。1987年开始发表这方面的论文。1988年12月K3108课表编排系统通过省级技术鉴定。西北师范大学应用该系统编排课表已经10个学期，并举办了两期学习班向省内外高校推广这一成果。实践证明(K3108)是较为成熟的计算机课表编排系统，有较强的通用性。该系统用Foxbase +(2.1)编写，特别适合在长城系列机上使用。

鉴于国内尚无关于计算机编排课表方面的专著，同时也为了及时交流经验，我们把近几年发表的或待发表的论文、译文，学习班使用的教材以及最新的(K3108)2.0版的全部源程序汇编成册，为有兴趣的读者提供一本尚不成熟的参考读本。

本书第一章是计算机编排课表的基本理论，涉及NP完全性理论，模糊数学，组合数学，教育心理学，信息科学和人工智能方面广泛的知识，阅读时可参阅书后的有关参考书。第二章介绍了 Foxbase +(2.1)语言。其中第二章第一节是为入门的读者写的。如果你已具备这方面的知识，可略去这一节不读。第三章介绍了(K3108)课表编排系统的功能及使用方法，并有西北师范大学化学系1989—1990学年度第二学期的全部排课信息和课表，供读者研究。第四章是〈K3108〉系统2.0版的全部程序清单。我们负责地指出，这个清单是没有任何保留的。我们的目的是给读者提供一个提高和改进的基础，减少不必要的重复性劳动。

作者十分感谢中国自动化学会理事、全国电力电子学会理事、甘肃省计算机办公室主任张问骅高级工程师，他在百忙中认真审阅了本书的初稿并为本书写了代序。

作者十分感谢刘明善同志在担任〈K 3108〉课题负责人期间对我们的巨大支持和关怀。

作者十分感激常亮同志、宋海声同志和张卫楷同志，他们在使用〈K 3108〉系统的过程中创造了很好的经验并提出过很好的建议。

由于时间仓促，加之作者水平有限，书中不妥之处在所难免，请读者见谅。对书中不完善处、甚至错误之处欢迎读者指正，作者在此表示衷心的感谢。

编 著 者

1989年11月30日

目　录

第一章

计算机编排课表的基本原理

四十年代中期，ENIAC机的研制成功以及美国数学家J. V. 诺依曼发表的《关于电子计算装置逻辑结构的初步探讨》的著名报告开创了人类电子计算机的新时代。1950年，英国数学家A.M.图灵发表了《计算机和智力》的论文，在世界范围内引起了关于机器能否思维的长期广泛的争论。1956年J.麦克阿瑟、M.明斯凯、H.赛尔夫和N.洛切斯特等人召开的以人工智能为名义的讨论会标志着人工智能这门学科的正式诞生。到了50年代末期，电子计算机的应用已深入到各个领域，许多管理部门由于应用了电子计算机，使工作效率得到惊人的提高。劳动强度大，工作效率低的高校课表编排工作也自然而然地引起了计算机专家的重视。1963年C.C.高特列伯提出的课表编排的数学模型，标志着课表编排这一课题的研究正式跨入了庄严的科学殿堂。但由于在实践中遇到的困难，使人们对课表问题解的存在性产生了疑问，直到1975年S.艾温等人才从理论上证明了课表问题是NP一完全的。这虽然回答了计算机编排课表在实践中遇到困难的原因，但同时等于宣布计算机编排课表无法实现。因为计算机难解性[3]的理论研究指出，现代计算机尚未找到解决NP一完全类问题的多项式算法。因此，此后这一课题的研究大都离开理论探讨的轨道而转向经验方式，这就使80年代的许多课表编排系统缺乏普适性。据了解，到目前为止，国际上关于这一课题已发表了论文几百篇。

我国对这一课题的研究起步较晚。清华大学1984年发表了他们的实验性研究成果[10]，南京工学院、成都科技大；西安工业大学、兰州大学以及大连理工学院等高等院校都相继开展了这方面的研究工作。

我们关于这一课题的研究始于1985年。并于1987年开始发表这方面的论文。我们的研究思路是把S.艾温提出的课表问题的经典组合规划改造为模糊组合规划，把最优解改造为合理解；我们不是回避组合爆炸的困难，而是细心地探讨组合爆炸的逆过程——坍缩的条件和规律；我们独创的24通道光路模型有效地排除了产生冲突的各种可能性，为课表编排提供了宝贵的无冲突空间；最后我们提出的神经网络模型使系统的智能保持在较高的水平上。本章主要汇集了我们关于这一课题的理论研究成果。因这一章涉及NP一完全理论，模糊数学，组合数学，信息论，人工智能等领域广泛的知识，读者阅读时可参照书后列出的有关文献。如果你的兴趣不在理论方面而在实际应用，则可跳过这一章，直接阅读第二章。

第一节　课表问题是NP一完全的

1976年S.艾温等人在美国SIAM J.COMPUT杂志上发表的题为《关于时间表和多物流

问题的复杂性》的著名论文，第一次证明了课表问题是 NP—完全的。本节的内容即译自这篇论文的第一部分。S．艾温的论证确立了课表问题的学术地位，把人们对课表编排复杂性的认识提到了理论的高度。

一、课表问题是NP完全的

这里将要讨论的课表问题（TT）是学校安排教学过程中的一个数学模型。实际上，这是一个相当朴素的模型，因为它忽略了一些在实际中确实起作用的因素[5]。然而，我们要说明，即使再给它增添约束条件，它仍然是一个NP完全问题[8][30]。

定义（TT）给定如下数组：

1、有限集H（周课时）；

2、集合$\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$，其中$T_i \subseteq H$（n是老师数，$T_i$是第 i 个老师的有效课时集）；

3、集合$\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$，其中$C_j \subseteq H$（m是班级数，$C_j$是第 j 个班级的有效课时集）；

4、$n \times m$阶非负整数矩阵 R（R_{ij}是第 i 个教师在第 j 个班级上课的课时）。

问题是要确定是否存在一个交函数

$$f(i, j, h): \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, m\} \times H \longrightarrow \{0, 1\}$$

（其中$f(i, j, h)=1$，当且仅当老师 i 在 h 课时教授班级 j）于是

$$(a)\quad f(i, j, h)=1 \Longrightarrow h \in T_i \cap C_j;$$

$$(b)\quad \sum_{h \in H} f(i, j, h)=R_{ij},\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m;$$

$$(c)\quad \sum_{i=1}^{n} f(i, j, h,) \leqslant 1,\ 1 \leqslant j \leqslant m,\ h \in H;$$

$$(d)\quad \sum_{j=1}^{m} f(i, j, h,) \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ h \in H。$$

（a）确保仅当老师和班级均有效时，才出现交汇空间。（b）确保在一周中老师 i 和班级 j 之间的交汇课时等于所需课时数 R_{ij}。（c）确保各班级每课时不多于一位老师。（d）确保一位老师不在同一课时为两个或两个以上课程不同的班级上课。

如果$|T_i|=K$，那么老师 i 可称为 K－老师；若

$$|T_i| = \sum_{j=1}^{m} R_{ij}$$

则称他为紧（tight），也就是说，只要在有效的时间里他必须上课。

定义（RTT）。RTT（约束课表问题）是一个受如下约束的 TT 问题：

1．$|H|=3$；

2．$C_j=H$，$1 \leqslant j \leqslant m$（班级总是有效的）；

3．每个老师或是紧 2－老师或是紧 3－老师；

4．$R_{ij}=0$ 或 1，$1 \leqslant i \leqslant n$，$1 \leqslant j \leqslant m$。

显然TT问题和RTT问题都是NP类问题。我们想要说明RTT是NP完全的，同样，TT也是一般的 NP 完全。为此我们联想到3—SAT（3文字子句合取范式的可满足性）是 NP 完全

的。3—SAT 定义如下：给出数组

1、文字集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_i, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_i}\}$

2、子句簇 $D_1, D_2, \cdots, D_k$，且 $1\leqslant j\leqslant k$，$|D_j|=3$，$D_j\subseteq X$。

问题是要确定是否存在一个对文字的“真”与“伪”的分配，使得：

（a）x_i 和 $\overline{x_i}$ 中的一个分配为“真”而另一个恰为“非”。

（b）每个子句 D_j 中最少有一个文字分配为“真”。

定理 1　3—SAT∝RTT

证　本证明是将 3—SAT 的一个有界约化多项式展为 RTT。在此构造中，确定的班级用子句的 x_i 或 $\overline{x_i}$ 表示，2—老师教授的班级顺序确定了文字的真值，其它的班级和老师也要保证真值分配时满足上述条件 (a) 和 (b)，并且一个文字的真值要前后保持一致。

用 P_i 表示变量 x_i 出现在各子句中的次数，即

$$P_i=\sum_{j=1}^{k}|D_j\cap\{x_i, \overline{x_i}\}|$$

对每个 x_i 构造 $5\cdot P_i$ 班的集合，用 $C_{ab}^{(i)}$ 表示，其中 $1\leqslant a\leqslant P_i$，$1\leqslant b\leqslant 5$（忽略上标 i，全部班级用相同的 i）。为简化说明，我们将用一组班级和老师图来叙述（见图1—1，此构造对应唯一的 i）。图中顶点表示班级——课时组合，行表示课时，列表示班级。课时是 h_1，h_2 和 h_3，现在一位2—老师在课时 h_1 和 h_2 有效，并应与 $C_{a_1b_1}$ 交汇一次，再与 $C_{a_2b_2}$ 交汇一次，如图 1—2 所示。两条对角线表明对这位老师的时间安排仅有两种可能的方式。

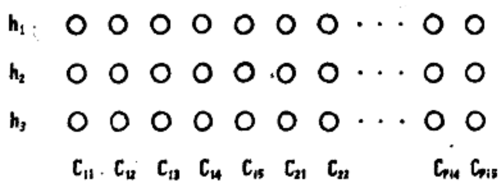

图　1—1

一位3—老师教授的班级 $C_{a_1b_1}$，$C_{a_2b_2}$，$C_{a_3b_3}$，用带有纵向箭头的横线表示，如图 1—3 所示，每个 $1\leqslant q\leqslant P_i$，加两个新班级 C'_{q_1} 和 C''_{q_1}，如图 1—4 所示。此构造描述了三位老师：两位 2—老师和一位 3—老师。由于三位老师都要在 h_1 上课，必须有 3 个顶点 (h_1, C_{q1})，(h_1, C'_{q_1})，(h_1, C''_{q_1}) 被利用。

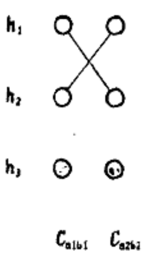

图　1—2

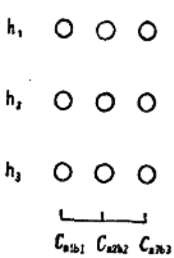

图　1—3

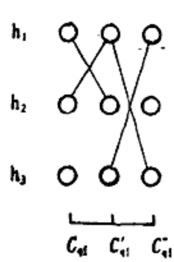

图1　—4

然而，我们还可以选择顶点（h_2，C_{q1}）和（h_3，C_{q1}）中的一个，用几种方式完成这个任务，读者可自行验证。这里仅就我们构造的剩余部分的子结构得出如下结论：（h_1，C_{q1}）被占用，（h_2，C_{q1}）与（h_3，C_{q1}）中的一个也被占用，因此，（h_1，C_{q1}）可以从图中删 去。

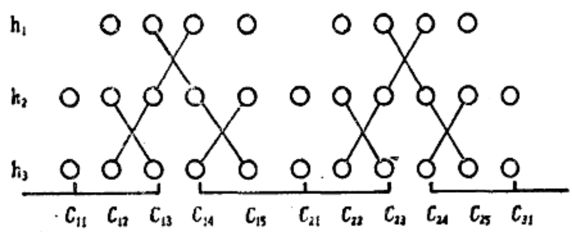

图 1—5

考虑图 1—5 所描述的老师构造，在子句中它始终将x_i和$\overline{x_i}$全部指定为真值。显然，这是一位 3—老师被分配去教授 C_{pi4}，C_{11}和 C_{13}；因此，图 5 描述的构造是一个循环。现在考虑 h_1和 h_2 有效的 P_i 个 2—老师，其中第 q 个这样的老师被分配到Cq_3和 Cq_4班。我们约定所有这样的老师都以相同的方式安排课表，即他们中的任意一个老师在 h_1教授Cq_3班，在h_2教授Cq_4班；或在 h_2教授Cq_3 班，在h_1教授Cq_4班。假定我们的课表不能满足这种一致性条件，那么必然存在 q，使得第 q 个老师在h_2教授Cq_3班，在h_1教授Cq_4班，而第（q+1）个教师在h_1教授 $C_{(q+1)3}$班，在h_2教授 $C_{(q+1)4}$班，在这种情况下，必须教授 C_{q4}，$C_{(q+1)1}$和$C_{(q+1)3}$班的 3—老师肯定不能在h_1安排上课——一个矛盾。

由此，我们对每个 i 都独立地获得了在 h_1 和 h_2有效的全体 2—老师的同一编排方式。在第 i 个构造中，这些教授C_{q3}和C_{q4}班的老师的顺序将确定原3—SAT问题中变量x_i 的真值。

现在增加几个3—老师连接各个 i 构造，以保证每个子句D_j中至少有一个文字值为“真”，对每个子句$D_j=\{\zeta_1，\zeta_2，\zeta_3\}$，用下面的方法分配一个 3—老师。这三个文字中的每一个都分配一个班级。如果$\zeta_1=x_i$，并且这是这个变量的第 q 次出现，则相应的班是 $C_{q_2}^{(i)}$。如果$\zeta_1=\overline{x_i}$，则相应的班是 $C_{q_5}^{(i)}$。那些相应于ζ_2和ζ_3的班亦做类似的定义。

现在完成了 RTT 问题的定义。被定义的班级总数为 21·k，老师总数为22·k（15·k 个 2—老师，7·k 个 3—老师），我们要指出，当且仅当以上构造的RTT问题有正解时，给定的 3—SAT 问 题有一正解。

首先假定 3—SAT问题有正解。现在以这种方式分配的文字值来说明前文构造的 RTT问题的编排方法——证明它的答案也是正解。

假设x_i被赋值为“真”。那么，对每个$1\leqslant q\leqslant P_i$，第 q 位2—老师被安排在$h_1$教授 $C_{q_3}^{(i)}$班，在 h_2 教授 $C_{q_4}^{(i)}$班。反之，若 x_i 被赋值为“伪”则对每个$1\leqslant q\leqslant P_i$，第 q 个 2—老师被安排在$h_2$教授$C_{q_3}^{(i)}$班，在$h_1$教授 $C_{q_4}^{(i)}$班。

在每个子句D_j内，至少有一个文字分配为“真”，设为ζ，若$\zeta=x_i$，且该文字是 q 次出现，则应当教授C_{q2}和C_{q3}班的 2—教师安排为在h_3教授C_{q2}班，在h_2教授C_{q3}班。

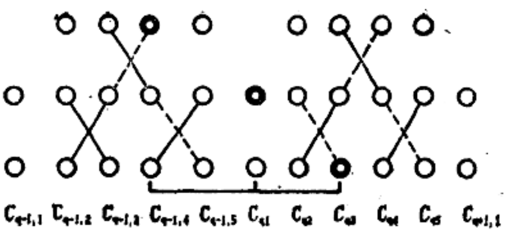

图 1—6

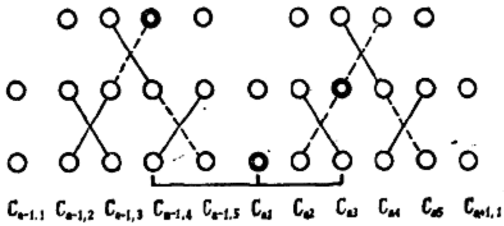

图 1—7

（在图 1 — 6 中，到目前为止已讨论过的每个 2 —老师的课表分配由一条粗实线表示，舍去的选择用虚线表示。细实线是还没有选用的。）

分配教授班级$C_{(q-1)4}$，C_{q1}和C_{q3}的 3 —老师在h_1教授 $C_{(q-1)4}$班，在 h_2 教授C_{g1} 班，在h_3教授C_{q3}班（他的交汇空间由园圈圈起来的顶点表示），最后，相应于子句D_j 的 3 —老师在h_2教授C_{q2}班，还需说明，他能够在 h_1和h_3去教授另外两个分配给他的班。显然，其他任何老师从未在h_1教授班级C_{a2}，C_{a5}这类班级。设$\zeta'=x_r$是D_j中的另一个文字，且为“伪”，则相应的C_{a2}班在h_2必定是由 2 —老师上课，第h_3课时仍然有效。又设 $\zeta'=\overline{x_r}$，且为“伪”，那么C_{a5}必定在h_2由 2 －老师上课，第h_3课时仍然有效。最后，如果D_j 中剩下的两个文字都为“真”，对其中的每一个，我们不能仿效用于ζ 的图表。例如，若 $\zeta'=x_r$为“真”，并且这个文字是第a次出现，那么 2 －老师在h_2教授C_{a2}班，在h_3教授C_{a3}班，3 －老师在 h_1教授$C_{(a-1)4}$班，在h_3教授C_{a1}班，在h_2教授 C_{a3} 班（如图 1 — 7 所示）。因此，对教授 C_{a2} 班，第h_3课时仍然有效。现在，相应于D_j的 3 －老师的课时安排就容易了。其他情况与此类似，读者可自己分析。

再者，假设所构造的RTT问题的答案是正解，并且假定有一个合理的课表。如果在x_i 的构造中，被分配去教授C_{q3}和C_{q4}班的 2 －老师在h_1教授C_{q3}班，在h_2教授C_{q4}班，则x_i为“真”，如果他在h_2教授C_{q3}班，在h_1教授C_{q4}班，则x_i为”伪”。还需说明，对每一个子句$D_j=\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$中，至少有一个文字为“真”。如果$\zeta\in D_j$且为“伪”，则 h_2由 2 －老师教授相应的班（$\zeta=x_i$，教授C_{a2}班；$\zeta=\overline{x_i}$，教授C_{a5}班）以及相邻的班（$\zeta=x_i$，教授 C_{a3}班；$\zeta=\overline{x_i}$，教授C_{a4}班）。然而，如果三个文字都为“伪”，则对应 D_j 的 3 －教师就不能对自己所教授的三个班进行编排，因为他不可能利用h_2课时。证毕。

二、二元老师的课表问题是多项式可解的

考虑全体老师都是 2 —老师的约束 TT 问题。（对 1 —老师不予考虑）我们将通过一个简单的分支程序来解决多项式时间问题，因为分支深度是有限的。

我们的算法是逐步给出老师的教学安排。在给定的阶段内，当一部分老师的课表已经排定时，如果某老师不能根据同样的规则进行编排，我们就称他的课表是不可能的（impossible）。如果正在编排的课表中，根据同一规则安排他的课表是可能的，我们就称他是隐含的（implied）。

算法：

1、设置 PHASE 为 2。

2、如果全部教师已安排好，则以正解结束。

3、如果存在没有编排课表的老师，而他的课表是不可能的则转步骤 7。

4、如果不存在没有编排课表的隐含的老师则转步骤 6。

5、设 T_i 是一位没有编排的隐含类老师，临时安排 T_i 是必要的，则转步骤 2。

6、使所有临时课表成为永久课表。设 T_i 为任意没有排课的老师，为他任选一个课表并记录这个选择，设置 PHASE 为 1，转步骤 2。

7、若 PHASE = 2，则以负解结束。

8、返回那个被记录的老师的课表并消除所有临时课表。设置PHASE为 2，转步骤3。

此算法显然仅在构造一个可能的交函数时有正解。这里使用了一个有限的返追踪方法。因为曾经仅有一个可能改变的决定被记录。这种有限的返追踪方法用以发现业已存在的交函数是不够明显的。

设赋值分量为老师集，并且获得了他们的永久课表（第 6 步）。分量可以依赖任意选择和对老师被考虑的顺序。他们按出现的顺序依次编号。为完全性起见，那些没有编排课表或在计算结束时课表还没有最后确定的老师的集合被看作是最后的分量。

引理 1　如果 T_i 为最后分量的一位教师，则他可利用的班级——课时对中没有一个被前面分量的老师所占用。

证：新的分量从第 6 步开始，这个情况的发生仅当没有老师是“隐含的”。因为全体老师都是二元老师，引理随之成立。证毕。

引理蕴涵着这样一层意思，无论何时，当我们合理地编排一个确定的老师的课表或者编排全部隐含的老师的课表的努力失败后算法以负解结束。可以确信，以前建立的全部永久性课表不能阻止这种状态。

值得注意的是，有限分支技术对其它类似情况也适用，如 2 —SAT 问题（即最大为二文字的合取范式可满足性问题）。使用适当的数据结构，以找出任何一个判断的蕴涵，同时并行地测试第 6 步中的两个判断（以便迅速取得结果，停止其它可能的赋值），则可能显示出算法具有时间复杂性 O(n)。其他已知的 2 —SAT 问题的算法，如戴维斯和普斯安[4]算法（出自S.A.库克[2]）或者后来奎因著作[5]中关于 Concensus (star) 操作的算法，具有时间复杂性 $O(n^2)$。

三、证明一个定理

如果全体老师和班级都没有时间约束，则总存在一个交函数。本节的目的是要证明一个定理。这个定理来自二部复图匹配的经典理论。

在 $T_i=C_j=H$，$1\leqslant i\leqslant n$ 且 $1\leqslant j\leqslant m$ 的条件下，一个给定的TT问题无时间约束，若无论老师还是班级均不超负荷，显然是可行的。即：

（i）对所有 $1\leqslant i\leqslant n$，$\sum_{j=1}^{m} R_{ij}\leqslant|H|$，

（ii）对所有 $1\leqslant j\leqslant m$，$\sum_{i=1}^{n} R_{ij}\leqslant|H|$。

TT问题显然可行的条件对交函数的存在而言是必要的，但不是充分的。

我们的目的是要证明以下定理。

定理 2　如果 TT 问题是明显可行的且无时间约束，则存在交函数。

证：首先定义下面的量：

$$\gamma=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{ij},\ h=|H|,$$

$$\upsilon=m-\left[\frac{\gamma}{h}\right],\ \mu=n-\left[\frac{\gamma}{h}\right],$$

再定义二部复图如下：

$$X=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}\cup\{\zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_\upsilon\}$$

$$Y=\{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m\}\cup\{\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_\mu\}$$

E是用以下方法构造的顶点X与顶点Y间连接的边集。对于每一个$1\leqslant i\leqslant n$和$1\leqslant j\leqslant m$,我们把R_{ij}的平行边缘放在x_i和y_j之间。其次,对于每一个$1\leqslant i\leqslant n$，通过把$h-\sum_{j=1}^{m}R_{ij}$的边放到x_i与$\{\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\cdots,\eta_\mu\}$的顶点之间使,得$x_i$的阶数恰为h。连接这些边的顶点是哪一个无关紧要，但是每个η_k的阶数绝不能超过h。对于每个$1\leqslant j\leqslant m$，通过把$h-\sum_{i=1}^{n}R_{ij}$的边放到y_j和$\{\zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_\upsilon\}$的顶点之间，使得$y_j$的阶数恰为h，每个$\zeta_l$的阶数永不超过h。最后，通过把边放到阶数都较低的任意ζ_l与任意η_k之间，使得$\{\zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_\upsilon\}$和$\{\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_\mu\}$中的顶点阶数恰为h。

需要进一步说明的是，在所有定义隐含的条件容易被满足的意义下,这个定义是适当的。

在完成x_1，x_2，$\cdots$，x_n的阶数的过程中，我们构造的边数为$n\cdot h-\gamma$。因此，我们可能做到使μ满足不等式$\mu\cdot h\geqslant n\cdot h-\gamma$。类似地，$\upsilon$满足完成$y_1$，$y_2$，$\cdots$，$y_m$的阶数的可能性条件。最后，要完成$\zeta_1$，$\zeta_2$，$\cdots$，$\zeta_\upsilon$的阶数所需的边数是$\upsilon\cdot h-(m\cdot h-\gamma)$,它等于$\gamma-[\gamma/h]\cdot h$。（这是$\gamma$被h除后的余数。）完成$\{\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_\mu\}$的级数同上。因此，构造的最后部分也并不困难。

其次，令$\Gamma(A)$，其中$A\subset X$，是顶点$B\subset Y$的集合，边$a\to b\in E$，其中$a\in A$，$b\in B$。

引理 2　每个$A\subset X$，$|\Gamma(A)|\geqslant|A|$。

证：在G中，伴随着$\Gamma(A)$有$h\cdot|\Gamma|(A)|$个边。这里包含着伴随着A的边。于是

$$h\cdot|\Gamma(A)|\geqslant h\cdot|A| \qquad \text{证毕}$$

引理2保证了海尔的约束条件成立。因此，由海尔理论[6]可知存在一个$n+\upsilon(=m+\mu)$个边的集合，其中没有两个元素拥有共同的终点。现在用边集合M（统称为X到Y的完全匹配），为第一课时$h_1\epsilon H$定义的交函数。如果$x_i\rightarrow y_i\epsilon M$，则$f(i, j, k)=1$，否则$f(i, j, h)=0$。显然条件（c）和（d）对$h_1$有效。然后从E中除去M，新图全部顶点的级数为$h-1$，引理2中海尔条件再一次有效。这就保证了X对于Y的另一个完全匹配M′的存在。还可由此对全部$1\leqslant i\leqslant n$和$1\leqslant j\leqslant m$定义$f(i, j, h)$。重复这个过程h次，直到所有E边全被使用止。这就保证了条件（b）有效。于是完成了定理2的证明。证毕。

这里所用的技术是人们过去证明学校Dance原理的一个简单的推广。因此这个证明是建设性的并且可以在多项式时间里获得X对于Y的完全匹配（见霍普克罗特和卡尔普[8]），这样就可以在多项式时间里找出适用的课表编排，而并非仅仅证明它的存在。

第二节　课表编排的模糊性

计算机对课表编排问题的求解过程，实际上是对人工排课的模拟，所以深入地剖析人工排课过程中思维活动的规律和特点是非常必要的。本节将通过一个典型的例子给以说明。

一、人工排课过程中思维活动的特点

定义1：为了叙述简便，本文提及的课表是指每日3课次（上午2课次，下午1课次），每课次2学时，无单双周之分的简化课表。

定义2：教学计划中规定周课次分别1、2、3的课程顺次称为s类、p类、d类课。

例：请将一门d类课A填入图1－8所示课表。

工作人员根据例题要求，把图1－18所示的课表空间仔细观察后，稍加思索便把A课填入表内（如图1－10所示）。分析一下“稍加思索”的过程是很有趣的。如果这是一位很有经验的工作人员，他一定知道，d类课在课表中的编排方案是多不胜数的，在众多的方案中，他记住了一些比较典型的，所以当他着手编排d类课时，首先在脑海中浮现出他个人认为最好的一种方案L（见图1－9）。但观察图1－8所示的课表，A_2、A_3要填入的位置已被先排的课程占用，于是只得放弃方案L。接着，另外一个稍次的方案又浮现在他的眼前，但被同样的理由否定了。这个过程不断重复着，终于他找到了方案K（见图1－10）。该方案所需的位置课表均空，属于可行方案。为了慎重，他可能再寻找几个可行的方案（图1－11所示的方案K即是其一）与方案K进行比较，结果方案K优于其他方案。他选中了方案K，并据此将课程A填入表内。

图1－8

图1－9

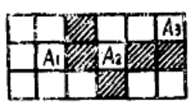

图1－10

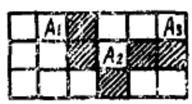

图1－11

分析工作人员以上的思维过程，有几点值得注意：

（1）课程A填入课表不是按d类课编排的最优方案L，而是按稍次之的方案K，这就说明一般情况下，课表的编排方案具有多样化的特点，在待选的方案集中，尽管工作人员觉得有一种最好，但并不是只有这最好的方案才可施行，其余的方案都不能用。这些方案之间并无“非此即彼”的严格界线。

（2）方案的选择过程不是按课表空间的几何顺序，而是按方案优劣的顺序。

（3）方案优劣的评定除了依赖少数几条几乎是公认的择优规律（例如：隔日排课，理论课以上午为主等）外，有些则纯粹出于个人好恶以及一些难以表述的主观动机。例如方案K和方案K′的优劣评判就很难得到大家的公认。有课前重温教案习惯的人可能觉得方案K好，而愿上早课的人可能觉得方案K′好。这种细微的评价标准显然是因人而异的。

（4）工作人员排课的标准是“合理、实用、有特色”。他们不敢说自己排的课表是最优的，这到不完全是出于谦虚，因为谁也说不清“最优”的具体内涵。

二、组合规划模型中的简并现象与解的不确定性

明确了人工排课过程中思维活动的规律和特点，就比较容易发现，经典的组合规划做为课表编排问题的数学模型有些不足之处。

经典的组合规划问题的求解，主要靠约束条件来实现。只要约束条件充分，那么最优的组合方案就能被唯一确定。因此，从理论角度来说，组合规划做为描述课表编排问题的数学模型并无不妥，但在实际工作中，随着论域范围的膨涨，即组合方案数的剧增，规划问题也就变得十分复杂。下面给出s、p、d类课根据课表空格n的多少确定组合方案数的计算公式：

$$S(n)=c_n^1=\frac{n!}{1!\ (n-1)!},\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ 18$$

$$P(n)=c_n^2=\frac{n!}{2!\ (n-2)!},\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ 18$$

$$D(n)=c_n^3=\frac{n!}{3!\ (n-3)!},\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ 18。$$

表1和图1—12分别给出了S(n)、P(n)及D(n)的计算结果和相应曲线。由图1—12的曲线可以看出：（1）若课表空格数相同，则课类越高相应的编排方案就越多。（2）若课类相同，则课表空格越多相应的编排方案也就越少。（3）若课类越高，随课表空格的增加编排方案也就增加的越迅速。

表1

类/n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
S(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
P(n)	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153
D(n)	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816

显然，编排方案越多，从中选择“最优”方案时需要的约束条件就越多，组合规划求解就越困难。