中学生课外读物

错在哪

数学部分

吉林人民出版社

中学生课外读物

错 在 哪

（數学部分）

马骥良、黄明华、金井平　编

吉林人民出版社

中学生课外读物
错　在　哪？
（数学部分）
马骥良、黄明华、金井平　编
*
吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行
延边新华印刷厂印刷
*
787×1092毫米32开本　7 5/8印张　168,000字
1981年9月第1版　1981年9月第1次印刷
印数：1—67,010册
统一书号：7091·1271　定价：0.55元

内 容 提 要

这是一本中学生的数学课外读物，主要内容包括中学生学习数学中常见的错误、数学诡辩、逻辑诡辩三部分，共选有代数、平面几何、立体几何、三角、解析几何、极限、导数和微积分等方面的例题二百八十余道.

中学生在学习数学中，常常会发生这样那样的错误，诸如概念不清、推理无据、判断草率、作图不准、粗枝大叶等. 本书通过列举、分析大量常见的典型错误，旨在从反面来堵塞"漏洞"，以弥补仅仅从正面掌握所学知识的不足. 数学诡辩和逻辑诡辩类似趣味数学，其结论荒谬绝伦，然而令人又一时难以说出错在何处，生动而乖僻，趣味横生. 当你煞费苦心将谜底揭破时，对寓于其中的数学道理的认识就大大加深了一步，从而启发思考，开扩眼界，对学好数学颇有裨益.

本书可供中学生及广大社会青年业余学习用.

目　录

引言·从眼睛的错觉谈起

俗话说"眼见为实"，果真如此吗？殊不知眼睛有时候也会欺骗你呢！请看看下面的图形吧！

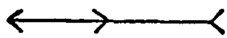

图 1

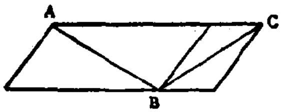

图 2

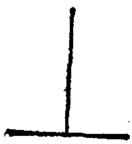

图 3

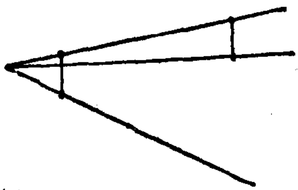

图 4

在这组图形中，相等的线段看上去却长短不同。

图 5

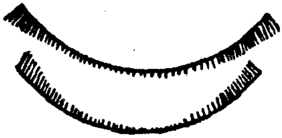

图 6

这两组半径相同又等长的弧，看上去弯曲程度很不相同。

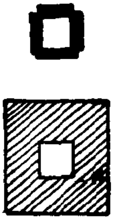

图 7

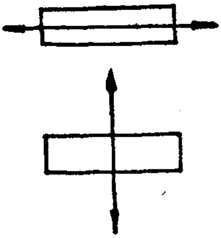

图 8

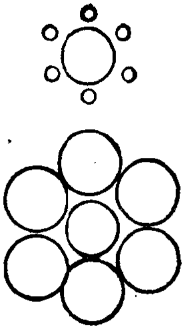

图 9

全等的正方形、矩形、圆，看上去却大小不等、宽窄不同。

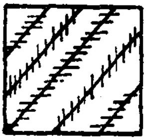

图 10

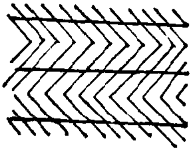

图 11

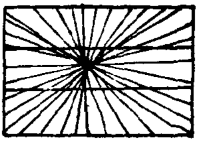

图 12

平行直线看上去却不平行甚至弯曲。

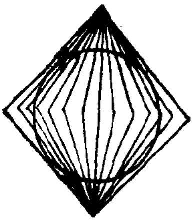

图 13

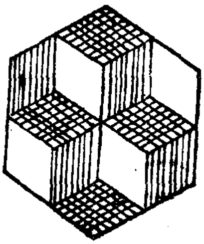

图 14

左图中的圆看上去已变了形；右图中的三个立方体，忽而两个在下，一个在上；忽而两个在上，一个在下。

看了这些图，你就会感到，只凭眼睛的直观判断图形的

长短、大小、曲直等往往并不真实，这就是眼睛的错觉。

在学习数学中，发生的错误远不仅于此，还往往由于概念不清、推理无据、判断草率、粗枝大叶等而出现形形色色的错误。我们在本书中，不厌其烦地列举了大量例子，目的在于从反面来堵塞知识的漏洞，以弥补仅从正面掌握、巩固知识的不足。

在数学中，把本身错误，但看上去似乎正确的推理而导出错误结果这类问题，称为数学诡辩。历史上曾有过著名的"芝诺诡辩"，那是在大约两千四百年前，古希腊哲学家芝诺(公元前490—430)提出一个阿西里追龟说。阿西里是希腊传说中一个善走的神，可是芝诺却说，虽然阿西里的速度十倍于龟，却永远追不上徐徐前进的乌龟。他的理由是：开始时，龟在阿氏前10里，当阿西里走完这10里时，在这段时间内，龟已向前走了1里；而当阿西里再走完这一里时，龟又向前走了$\frac{1}{10}$里。这样推论下去，阿西里每赶上龟一段路程，龟又向前走了这段路程长度的$\frac{1}{10}$，于是，阿西里和龟之间总有一段距离，且始终追不上乌龟。

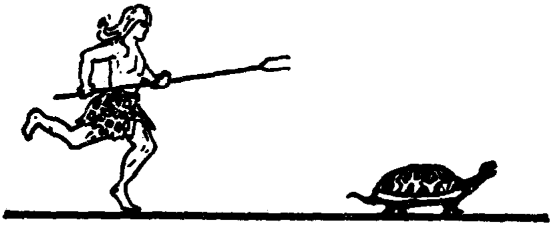

图 15

这显然是很荒唐的，但要正确地指出芝诺的错误也并非轻而易举。有人这样解释说：把阿西里与龟相距的里数列如下式：10，1，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10^2}$，$\frac{1}{10^3}$，…$\frac{1}{10^n}$，…当n取"无穷"，就

得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=0$，这说明阿氏已追上龟了。

这种解释并没有真正指出芝诺的错误。那么，究竟芝诺错在什么地方呢？错误就在于他把阿西里追赶乌龟的路程任意地分成无穷多段，而且断言说：要走完这无穷多段的路程，就非要有无限长的时间不可。事实上，我们很容易计算出阿氏追及龟所用的时间：设阿氏的速度是每小时10里，于是按照上面的分段，走完第一段所需时间是1小时，走完第二段是$\frac{1}{10}$小时，走完第三段是$\frac{1}{10^2}$小时，…，因此，追及龟所需时间就是无穷级数

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots$$

的和。这是无穷递缩等比数列的和，高中学生都容易求得，为$\dfrac{1}{1-\frac{1}{10}}=1\frac{1}{9}$（小时）即，只要用$1\frac{1}{9}$小时，阿氏即可追及乌龟。此后，阿氏就超过乌龟，且把它远远抛在后面。

这个例子告诉我们：只凭直观想象，认为无穷多段路程的和一定无穷、无穷多段时间的和必然是无穷长，都是错误的。因为无穷多项相加未必无穷，当级数收敛时，它就有确定的和。

同样，凭借直观经验建立起来的集合的概念也很有问题，有不少数学家曾举出不少例子来说明这一点。我们介绍一个有名而又非常有趣的“理发师悖论”.这是英国哲学家和数学家罗素（1872—1970）在1918年提出来的一种通俗形式的悖论。所谓悖论就是指自相矛盾的说法。

理发师的胡子谁刮？

一个夸口不与别人竞争的乡村理发师声称：他不给所有那些给自己刮胡子的人刮胡子，而只给所有不给自己刮胡子

的人刮胡子．有一天，他想，是不是应该给自己刮胡子？如果他给自己刮胡子，那么根据他所说的前半句话，是不应该给自己刮胡子的；可是，按照他的宣告的后半句话，他又必须给自己刮胡子．于是，这个理发师陷入一个逻辑困境之中，他的胡子由别人刮不行，由自己刮也不行．为什么会出现这左右为难的情况呢？请读者自己先想想， 当你读完本书时，你将会得到一些启发．

最后，我们要提醒读者，上面举的几个例子并不是否定直观在认识事物中的作用．生动的直观便于学生接受和理解数学概念和理论，但若不从直观上升到抽象思维，只凭借直观经验，便不能正确认识和掌握这些概念和理论．

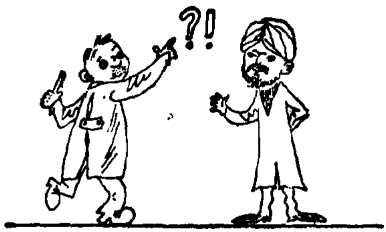

图 16

一、学生学习数学中常见的错误

学生在数学学习中，常常会发生这样或那样的错误．我们这里汇集的只是常见的、较典型的一部分，有些例子尽管看起来似乎错处明显，但恰是这样的错误，在作业及试卷中却屡见不鲜．

很明显，剖析典型错误，是预防和纠正错误的有效途径之一．同时，它对于加深理解概念，培养严密的逻辑思维能力，养成严谨认真的学习习惯，无疑是很重要的．

罗列这些错误，初看起来似乎枯燥，但如果你能从中得到教益，那么，你甚至会拍案醒悟，兴趣顿生．

（一）代数部分

1．解方程

$$\frac{a-x}{1-ax}=\frac{1-bx}{b-x}.$$

解：$(a-x)\cdot(b-x)=(1-ax)\cdot(1-bx)$,

展开，整理得

$$x^2-1=ab(x^2-1),$$

$$1=ab.$$

2．解方程

$$(x+1)^2-(x+2)(x+3)=(x+4)(x+5)-(x+6)^2.$$

解：$x^2+2x+1-x^2-5x-6=x^2+9x+20-x^2-12x$

$$-36,$$

$$-3x-5=-3x-16,$$

$$5=16.$$

3. 解方程

$$\frac{6}{x-3}-\frac{9}{x-2}=\frac{1}{x-4}-\frac{4}{x-1}.$$

解：$\dfrac{6(x-2)-9(x-3)}{(x-3)(x-2)}=\dfrac{(x-1)-4(x-4)}{(x-4)(x-1)}$，

展开，整理得

$$\frac{15-3x}{x^2-5x+6}=\frac{15-3x}{x^2-5x+4},$$

$$6=4.$$

4. 解方程

$$\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{6}+1}=\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x+1}-2\sqrt{6}+1}.$$

解：$\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{6x}+\sqrt{x}+4\sqrt{x+1}-8\sqrt{6}+4$

$$=\sqrt{x^2+x}+2\sqrt{6x}+\sqrt{x}-4\sqrt{x+1}-8\sqrt{6}-4,$$

$$8\sqrt{x+1}+8=4\sqrt{6x},$$

$$2\sqrt{x+1}=\sqrt{6x}-2,$$

$$4x+4=6x+4-4\sqrt{6x},$$

$$2\sqrt{6x}=x,$$

$$24x=x^2,$$

$$x=24.$$

5．解方程

$$\sqrt{x-4}-\frac{3}{\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-1}=0。$$

解：$x-4-3-\sqrt{(x-1)(x-4)}=0$，

$$x-7=\sqrt{(x-1)(x-4)},$$

$$x^2-14x+49=x^2-5x+4,$$

$$9x=45,$$

$$x=5。$$

6．求以比方程$7x^2-6x+1=0$的二根大$\frac{1}{2}$的数为两根的方程。

解：设α、β是原方程的二根，则新方程的根是$\alpha+\frac{1}{2}$、$\beta+\frac{1}{2}$，新方程为

$$y^2-\left(\alpha+\frac{1}{2}+\beta+\frac{1}{2}\right)y+\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\beta+\frac{1}{2}\right)=0。$$

但$\alpha+\beta=6$，$\alpha\beta=1$（韦达定理），由此可得，所求的方程为

$$y^2-7b+4\frac{1}{4}=0\text{或}4y^2-28y+17=0。$$

7．$x+x\sqrt{2}=1$，求x。

解：$x\sqrt{2}=1-x$，

$$2x^2=1+x^2-2x,$$

$$x^2+2x-1=0,$$

$$\therefore\quad x=-1\pm\sqrt{2}。$$

8．$x+2\sqrt{x}=3$，求x。

解：$x+2\sqrt{x}=3$，

$x+2\sqrt{x}-3=0$，

$$\sqrt{x}=-1\pm\sqrt{4}=\begin{cases}1\\-3.\end{cases}$$

$$\therefore\quad x=\begin{cases}1\\9.\end{cases}$$

9．解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\cdots\cdots & ①\\ x-y=4\cdots\cdots & ②\end{cases}$$

解：由①得

$x^2+y^2=2xy$，

$(x-y)^2=0$，

$x-y=0$。

由②知$x-y=4$，

故有$0=4$。

10．解方程组

$$\begin{cases}(a-2)x+(3a-1)y=2a\cdots\cdots & ①\\ 4x-2(a-1)y=-a\cdots\cdots & ②\end{cases}$$

另：当$a=0$和$a=-3$时，解为多少？

解：①×4－②×$(a-2)$得

$y(2a^2+6a)=a^2+6a$，

$$y=\frac{a(a+6)}{2a(a+3)}=\frac{a+6}{2(a+3)}.$$

将其代入①可得

$$x=\frac{a-3}{2(a+3)}.$$

当$a=0$时，$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=1.\end{cases}$

当$a=-3$时，$\begin{cases}x=-\infty\\ y=+\infty.\end{cases}$

11．解方程组

$$\begin{cases}x^2+xy=14\cdots\cdots & ①\\ x+y=7\cdots\cdots & ②\end{cases}$$

解：①除以②得

$$x_1=2,\quad y_1=5.$$

将$y=5$代入①得

$x^2+5x-14=0.$

解之，

$$x_1=2,\quad x_2=-7.$$

将$x_2=-7$代入②得：

$$y_2=14.$$

12．解方程组

$$\begin{cases}a^2x^2=b^2y^2\cdots\cdots & ①\\ 2ax^2=b^2cy\cdots\cdots & ②\end{cases}$$

解：①÷②得

$$\frac{a}{2}=\frac{y}{c}\quad 即y=\frac{ac}{2}.$$

将$y=\dfrac{ac}{2}$代入②得

$$2ax^2 = b^2c \cdot \frac{ac}{2},$$

$$x^2 = \frac{b^2c^2}{4},$$

$$x = \pm\frac{bc}{2}.$$

将$x = \pm\frac{bc}{2}$代入①得

$$a^2 \cdot \frac{b^2c^2}{4} = b^2y^2,$$

$$y^2 = \frac{a^2c^2}{4},$$

$$y = \pm\frac{ac}{2}.$$

13. 解方程组

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \cdots\cdots ① \\ 2x + 3y = 22 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

解：由②有$x = \frac{22 - 3y}{2}$代入①得

$$5y^2 - 132y + 448 = 0,$$

$$y_1 = 4, \quad y_2 = \frac{112}{5}.$$

代入①得

$$x = \pm 5, \quad x = \pm\frac{113}{5}.$$

14. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{y - 26}{x - 26} \cdots\cdots ① \\ xy = 25 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

解：由①变形可得

$$x^2-26x=y^2-26y,$$

$$(x+y)(x-y)-26(x-y)=0,$$

$$(x-y)(x+y-26)=0,$$

$$x-y=0 \quad \cdots\cdots \quad ③$$

$$x+y=26 \quad \cdots\cdots ④$$

由③式和④式得

$$x_1=13, \quad y_1=13.$$

由④和②联立，有

$$\begin{cases} x+y=26 \\ xy=25 \end{cases}$$

解之 $x=13\pm 12$。

当$x_2=25$时，由$x-y=0$得$y_2=25$。

当$x_3=1$时，类似地有$y_3=1$。

15. 求两个数，它们的和等于它们的积，还等于它们的平方和。

解：由题意有

$$x+y=xy=x^2+y^2.$$

由关系式

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy,$$

得$3(x+y)=(x+y)^2$。

即 $x+y=3$。

由韦达定理可知x和y是方程$u^2-3u+3=0$的根，

解得$u=\dfrac{3\pm\sqrt{-3}}{2}$。

于是此题无实数解，仅有虚数解。