小学教学参考丛书

分数、百分数及其教学

周华辅　李光荣

湖南人民出版社

小学教学参考丛书

分数、百分数及其教学

周华辅　　李光荣

湖南人民出版社

一九七九·长沙

分数、百分数及其教学

周华辅　李光荣

湖南人民出版社出版
湖南省新华书店发行
长沙市文华印刷厂印刷

1973年8月第1版第1次印刷
1979年5月第2版第2次印刷
字数：115,000　印数：1—120,000册
印张：5.75　统一书号：7109·957
定价：0.36元

内 容 提 要

本书主要介绍了分数的意义、性质、约分与通分等基本概念，同时分析了它们之间的内在联系，四则运算的原理，应用题的解题方法、步骤及其教学等内容。在这次修订中，进一步注重了基本理论的阐述和基本技能的训练，并增加了小数理论；对分数、百分数三种基本类型应用题的算术解法和方程解法，在增加的“简易方程”中进行了初步讨论。

另外，还在各节里编选了一定数量的练习题，并在书末附有答案，以便读者自学。

目　录

第一节　分数的产生与我国古代分数算法的发展

一、分数的产生

恩格斯曾经指出："和其他一切科学一样，数学是从人的需要中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的。"分数就是随着社会的发展，人们在生活和生产的实际斗争中逐渐形成的。

首先，由平均分配而产生分数。

原始人类最初是没有"数"的概念的。后来由于生活和生产的需要，人们必须清点东西的件数，从而产生了自然数1、2、3、……，往后又出现了"0"，一切自然数和"0"通称为整数。

随着客观事物的发展，需要平均分配的事例是很多的，在平均分配的时候，每人所得的数目，不一定完全能用整数来表示，如几个人平均分配一只野兔，每人所得的数目既不能用"1"来表示，也不能用"0"来表示。这样，人们感觉到仅用整数就不够用了，需要把单位"1"平均分成若干份．用它的一份或几份来表示所分得的数目，这就是分数．

其次，由测量而产生分数．

例如，用"米"做长度单位，去测量一条绳子的长度，测得的结果，比6米长比7米短，那么这绳子的长既不能用"6"

表示，也不能用“7”表示，而“6”和“7”是两个相邻的自然数，它们中间再没有自然数了，为了用“米”作为绳子剩余部分的长度单位。就必须引进新的数，这就是分数。

二、我国古代分数算法的发展

分数算法，在我国历史上出现很早，根据史料记载，秦朝以前，就知道分数的实际应用，那时有相当水平的天文、历法知识必然是人们懂得繁分数运算的结果。到公元一世纪东汉中期，我国就出现了《九章算术》。这本书里的“方田”一章，对分数加减乘除的运算方法就叙述得相当清楚。象这样系统的叙述，在印度直到公元七世纪初才出现，在欧洲就更迟了。

《九章算术》中的“方田”这一章，关于分数运算先讲“约分”，次讲“合分”和“减分”（这就是分数的加、减法），这章还把分数乘法叫做“乘分”，把分数除法叫做“经分”。分数的乘法法则，则是“分子乘分子做分子和分母乘分母做分母”，那就和现在的方法完全一样了。分数除法的法则，则是先通分，使除数和被除数变为同分母，然后以被除数的分子为分子，以除数的分子为分母，即得到商数。这种算法相当于：

$$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}\div\frac{ad}{ac}=\frac{bc}{ad}.$$

另一种，依据《九章算术》中的注解，知道古代分数除法是把除数的分子、分母颠倒，而后与被除数相乘，这也和现在的方法完全一样。例如：

$$\left(6\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\div 3\frac{1}{3}=\frac{85}{12}\div\frac{10}{3}$$

$$=\frac{85}{12}\times\frac{3}{10}=\frac{255}{120}$$

$$=2\frac{15}{120}=2\frac{1}{8}.$$

近代算术里的分数算法，大概从十五世纪开始在欧洲各国通行。当时很多数学家认为，这种算法起源于印度，由阿拉伯人传到欧洲。然而我国《九章算术》却比印度早了大约五百年。我国古时叫“筹算术”，印度则叫“笔算”。“筹”就是一些小竹棍，我国古代数学中的计算法，就是用这些小竹棍摆成不同的形式来表示不同的数目，进行各种计算。这种用“筹”来进行的计算，叫做“筹算”。由此可知，我国古代数学中关于分数运算的研究取得了重大的成就。这些成就，不仅在我国数学史上是辉煌灿烂的一页，就是在世界数学史上，也是十分杰出的。

第二节　分数的意义和性质

一、什么叫做分数

在实践中，我们除了用到整数外，还要用到分数。例如：

我国人口占人类总数的四分之一，我们把四分之一写作$\frac{1}{4}$。

工人师傅把一根钢条平均锯成五段，取其中的四段是这根钢条的五分之四，五分之四写作$\frac{4}{5}$。

某农具厂制造一种新式农具，成本是45元，只有原来成本的八分之五，八分之五写作$\frac{5}{8}$。

上面讲的$\frac{1}{4}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{5}{8}$等都是分数，它们分别把一个整体“1”平均分成4、5、8份，表示其中1、4、5份的数。由此可得：

定义 把一个整体平均分为若干份，表示其中一份或几份的数，叫做分数。

在一个分数里，表示把整体“1”（即单位“1”）平均分成若干份的份数，叫做分数的分母；表示所取的份数叫做分数的分子；表示其中一份的分数，叫做分数单位。

例如，$\frac{2}{3}$表示把一个整体平均分成3份，取其中的2份。3是分母，2是分子，$\frac{1}{3}$是这个分数的单位。

什么是分数？除上面的定义外，还可以这样解释：分数也可以看成是把几个单位平均分成若干份而得到每一份的结果。

例如，把3斤糖平均分成4份，每一份可得到$\frac{3}{4}$斤。又如，把4尺布平均分成5份，每一份可得到$\frac{4}{5}$尺。列出式子，即

前者为： $3\text{斤} \div 4 = \frac{3}{4}\text{斤}$，

后者为： $4\text{尺} \div 5 = \frac{4}{5}\text{尺}$。

整数a被自然数b除，它们的商可以用分数$\frac{a}{b}$来表示：

$$a \div b = \frac{a}{b}.$$

在分数$\frac{a}{b}$里，a叫做分子，b叫做分母，“——”叫做分数线。

在整数里我们已经学过，除数不能为零，因而在分数里，分母也不能为零。

所有的分数不仅可以看作是一个单位的几分之几，也可以看作是若干个单位的几分之一。例如，分数$\frac{5}{8}$，不仅可以看作是一个单位的$\frac{5}{8}$，也可以看作是5个单位的$\frac{1}{8}$；又如，分数$\frac{8}{13}$，不仅可以看作一个单位的$\frac{8}{13}$，也可以看作8个单位的$\frac{1}{13}$。

一般地，分数$\frac{a}{b}$，不仅可以看作1的$\frac{a}{b}$，也可以看作a的$\frac{1}{b}$。而$\frac{1}{b}$就是$\frac{a}{b}$的这个分数的单位。

由分数的定义可知：式子$\frac{a}{b}$中($b \neq 0$，$b \neq 1$，$a \neq 0$)，根据实际需要，我们规定：

当 $b = 1$时，$\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a$；

当 $a = 0$，$b \neq 0$时，$\frac{a}{b} = \frac{0}{b} = 0$。

这样，任何整数a都可以用分数$\frac{a}{1}$表示。

所谓整体“1”，不只是表示一件东西，而且还可以表示一个班级，一块土地，一项工程，一个国家的人口，等等。所以，我们必须辩证地认识“1”。“1”和“多”是不能分离的、相互渗透的两个概念，而且“多”包含于“1”中，正如“1”包含于“多”中一样。例如，我国人口占世界总人口的四分之一，是把世界总人数作为整体“1”，这个整体数“1”里包含着全世界人口数30亿。因此，“1”可以表示一个整体，而这个整体可以含有很多个体。

二、分数的相等与不等

我们用同一个度量单位来测量同一个量，所得的量数也可能是许多形式不同的分数。

例如，用米来测量某一个长度。我们把1米分成10个等分，拿这样的一个等分来量这一个长度。如果这一个长度含有8个这样的等分，那么对于米来说，它的量数就是$\frac{8}{10}$。如果我们把每一个这样的等分再分成10个等分，那么1米就被分成了$10\times10=100$个等分，而这一个长度就含有$10\times8=80$个这样的新的等分。这就是说，对于米来说，此长度的量数又可以表示为$\frac{80}{100}$。

用同一个度量单位来测量同一个量，所得的量数虽然是形式不同的分数。但是，它们所表示的是同一个量，所以，它们都是相等的。例如，$\frac{8}{10}$和$\frac{80}{100}$是相等的。

从上述例子可以看出，两个分数相等具有这样的性质：第一个分数的分子和第二个分数的分母的积等于第二个分数的分子和第一个分数的分母的积：$8\times100=80\times10$。因此我们得到：

定义 如果第一个分数的分子和第二个分数的分母的积等于第二个分数的分子和第一个分数的分母的积，那么这两个分数相等。

也就是说，两个分数$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$，如果$ad=cb$，

那么
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

例如，有两个分数$\frac{6}{8}$和$\frac{15}{20}$，因为$6\times20=15\times8$，

所以
$$\frac{6}{8}=\frac{15}{20}.$$

仿此，我们有：

定义 如果第一个分数的分子和第二个分数的分母的积大于第二个分数的分子和第一个分数的分母的积，那么第一个分数大于第二个分数。

如果第一个分数的分子和第二个分数的分母的积小于第二个分数的分子和第一个分数的分母的积，那么第一个分数小于第二个分数。

也就是说，有两个分数$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$，如果$ad>bc$，

那么 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$；如果$ad<bc$，那么$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$。

根据两个分数不等的定义，可以得出下面两个推论：

推论 1 两个同分母的分数，分子大的分数大。

也就是说，如果$a>a_1$，那么$\frac{a}{b}>\frac{a_1}{b}$。

证明 $\because$ $a>a_1$，

则 $ab>a_1b$， （乘法单调律）

$\therefore$ $\frac{a}{b}>\frac{a_1}{b}$。 （分数不等的定义）

推论 2 两个同分子的分数，分母小的分数大。

也就是说，如果$b<b_1$，那么$\frac{a}{b}>\frac{a}{b_1}$。

证明 $\because$ $b<b_1$，

则 $ab_1>ab$， （乘法单调律）

$\therefore$ $\frac{a}{b}>\frac{a}{b_1}$。 （分数不等的定义）

三、分数的基本性质

我们对以下两组图形进行分析、比较，很容易得出分数的基本性质。（见图 2—1）

在图甲与图乙中，$\frac{1}{3}$与$\frac{2}{6}$，$\frac{3}{4}$与$\frac{6}{8}$哪个大呢？

如图乙所示，全线段的长是整体“1”，把它平均分成四段，取其中的三段，所成的分数是$\frac{3}{4}$；但平均分成八段，取其

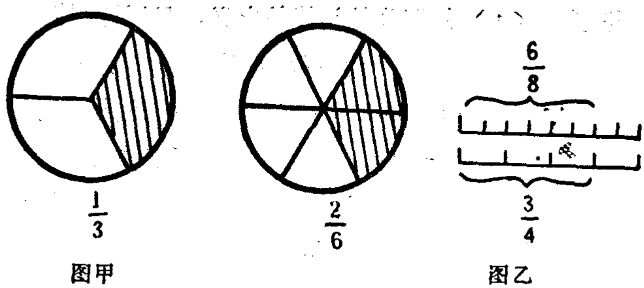

图2—1

中的六段，所成的分数$\frac{6}{8}$仍用同样长的线段表示，所以$\frac{3}{4}$和$\frac{6}{8}$相等。又$\frac{3}{4}$和$\frac{7}{8}$各用线段表示，长度不相等，所以这两个分数就不相等。

又因为整数中的被除数、除数扩大（或缩小）相同的倍数（除零外），商不变的性质，可以推广到分数，从而得出：

$$\frac{1}{3}=1\div 3=(1\times 2)\div(3\times 2)=\frac{2}{6},$$

$$\frac{2}{6}=2\div 6=(2\div 2)\div(6\div 2)=\frac{1}{3},$$

所以，$\quad \frac{1}{3}=\frac{2}{6}$.

我们得到：

分数的基本性质　分数的分子和分母都乘以或除以相同的自然数，分数的大小不变。

也就是说，如果$\frac{a}{b}$是一个分数，m是一个自然数，那么

(1) $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$;　　(2) $\frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}$.

证明 （1）根据分数相等的定义，易于证明性质（1）成立。也就是要证明 $a(bm)=b(am)$ 这个等式成立。

$$\because \quad b(am)=bam \qquad \text{(乘法结合律)}$$
$$=abm \qquad \text{(乘法交换律)}$$
$$=a(bm), \qquad \text{(乘法结合律)}$$

即 $$a(bm)=b(am),$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

（2） $$\because \quad \frac{a\div m}{b\div m}=\frac{a\div m\times m}{b\div m\times m} \qquad \text{〔根据(1)〕}$$
$$=\frac{a}{b}, \qquad \text{(除法定义的推论)}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}.$$

例 1 $\frac{3}{8}=\frac{3\times 15}{8\times 15}$， 即 $\frac{3}{8}=\frac{45}{120}$.

例 2 $\frac{15}{25}=\frac{15\div 5}{25\div 5}$， 即 $\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$.

四、真分数与假分数

在整数除法中讨论过，当被除数大于或等于除数时，商就大于或等于1，当被除数小于除数时，商就小于1．这个性质同样可以推广到分数．因此我们有：

定义1 分子比分母小的分数，叫做真分数．

如$\frac{2}{7}$、$\frac{3}{11}$、…等，都是真分数．真分数一定小于1．

定义2　分子比分母大或者分子和分母相等的分数，叫做假分数。

如$\frac{7}{2}$、$\frac{5}{3}$、$\frac{11}{11}$、…等，都是假分数。假分数一定大于或等于1。

五、分数和除法、比的关系

根据分数、除法和比的意义，它们之间的关系，可列表如下：

分数	分子	——（分数线）	分母	分数值
除法	被除数	÷（除号）	除数	商
比	前项	：（比号）	后项	比值

分数和除式比较：分数是一个数，而除式是一个运算式，它们是两个不同的概念，但也有密切的内在联系。如分数"$\frac{1}{3}$"表示把整体"1"平均分成3份，取其中的1份，而除式"$1 \div 3$"表示把"1"平均分成3份，求其中的一份是多少，所以$1 \div 3 = \frac{1}{3}$。同理$2 \div 3 = \frac{2}{3}$，$3 \div 4 = \frac{3}{4}$。分数和除式的关系，可用下面的式子表示：

$$\text{被除数} \div \text{除数} = \frac{\text{被除数}}{\text{除数}} \begin{matrix} \cdots\cdots\text{分子} \\ \cdots\cdots\text{分数线} \\ \cdots\cdots\text{分母} \end{matrix}$$

我们在讲过分数的四则运算后，再把分数线的两种含义交待清楚：第一，分数线含有"除"的意思，第二，分数线有时