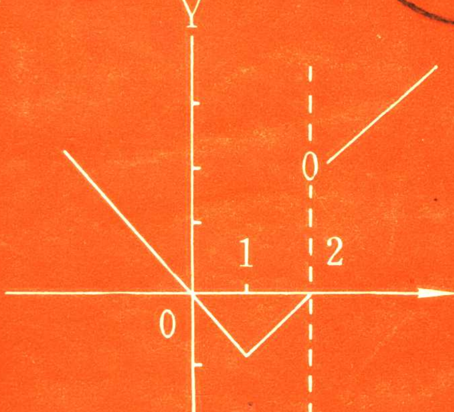
高培根 编著

初等代数难点释疑



初等代数难点释疑

高 培 根 编著

知 识 出 版 社

初等代数难点释疑

高培根 编著

知 识 出 版 社 出 版

（北京安定门外外馆东街甲1号）

新华书店北京发行所发行　北京印刷三厂印刷

开本787×1092 1/32　印张2　字数40千字

1984年5月第1版　1984年5月第1次印刷

印数：1—268,000

书号：7214·22　　定价：0.20元

内 容 简 介

本书通过具体例子，对初中学生在学习代数时每感困难和常出错误的几个问题，进行剖析和说明．共分六个专题（即绝对值、算术根、非负数、换元法在解方程中的应用、一元二次方程根与系数的关系及其应用、代数式的求值问题）．每个专题后面还附有适量的习题，可供初中数学老师和学生以及广大自学代数的同志参考．

目　　录

一、绝 对 值

绝对值是中学数学中重要概念之一。由初一开始就引入此概念。绝对值本身并不难理解，但要做到解题正确却需要通过不断练习、加深理解和掌握正确的处理方法，否则很容易出错。

什么是绝对值？

正实数与零的绝对值是其自身，负实数的绝对值是它的相反数。即

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

也就是说，$|x|$ 表示数轴上坐标为 x 的点与原点的距离。

总之，任何实数的绝对值是一个非负数，即 $|x| \geqslant 0$，读者必须牢牢地记住这一点！

无论处理什么类型的题目，只要其中有绝对值的量存在，最关键的一步就是作去掉绝对值符号的恒等变形。解题中出现一些诸如下述的错误：$|1-3x| = 1-3x$，$|a-b| = a-b$，$|\lg 3-1| = \lg 3-1$，等等，就是由于忽视绝对值最本质的属性——它是一个非负数造成的。试问：$1-3x$，$a-b$，$\lg 3-1$ 都是非负数吗？如果想到了这些就不会轻率地写出上面那些等式来。

去掉绝对值号要注意些什么呢？

（Ⅰ）如果根据已知条件或题目自身隐含的条件可肯定绝对值号内的数（或代数式）为“负”或“非负”，则由绝对值的定义可直接写出其结果.

例如：已知 $a<b$，则 $|a-b|=b-a$；

$|\lg 3-1|=1-\lg 3$（$\because$ $1>\lg 3$ 可由自身肯定）.

（Ⅱ）如果根据已知或题目自身不能肯定绝对值号内的代数式为“负”或“非负”，就应分别各种情况进行讨论。

下面就把初中阶段所接触到的有关绝对值的问题用例子加以说明.

1．绝对值代数式的化简

例1 化简 $|1-3x|+|1+2x|$。

解：$|1-3x|$ 的零点是 $x=\frac{1}{3}$，$|1+2x|$ 的零点是 $x=-\frac{1}{2}$，数轴由 $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ 分成三个区间 $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)$，$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，$\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$.

① 当 x 在区间 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 取值时，

$|1-3x|=1-3x>0$，$|1+2x|=-(1+2x)>0$.

$\therefore |1-3x|+|1+2x|=(1-3x)+[-(1+2x)]=-5x$.

② 当 x 在区间 $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$ 取值时，

$|1-3x|=1-3x>0$，$|1+2x|=1+2x\geqslant 0$.

$\therefore |1-3x|+|1+2x|=(1-3x)+(1+2x)=2-x$.

③ 当 x 在区间 $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 取值时，

$|1-3x| = -(1-3x) \geqslant 0$，$|1+2x| = 1+2x > 0$。

$\therefore |1-3x| + |1+2x| = -(1-3x)+(1+2x) = 5x$.

综合起来，可写成如下形式：

$$|1-3x|+|1+2x| = \begin{cases} (1-3x)+[-(1+2x)] = -5x, & \text{当} -\infty < x < -\frac{1}{2} \text{时}. \\ (1-3x)+(1+2x) = 2-x, & \text{当} -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{3} \text{时}. \\ [-(1-3x)]+(1+2x) = 5x, & \text{当} \frac{1}{3} \leqslant x < +\infty \text{时}. \end{cases}$$

例 2 已知 $x < -3$，化简 $|4-x| - |3x+1| + |x+3|$.

解：$|4-x|$，$|3x+1|$，$|x+3|$ 的零点分别为 4，$-\frac{1}{3}$，-3，整个数轴分为 $(-\infty, -3)$，$\left[-3, -\frac{1}{3}\right)$，$\left[-\frac{1}{3}, 4\right)$，$[4, +\infty)$. 但由已知 $x < -3$，即 x 在区间 $(-\infty, -3)$ 内取值.

$\therefore$ 原式 $= (4-x) - [-(3x+1)] + [-(x+3)]$

$= 4-x+3x+1-x-3 = x+2$.

例 3 化简 $\frac{|x|}{x}$.

解：由题目本身可知 $x \neq 0$，否则无意义.

$$\therefore \quad \frac{|x|}{x}\begin{cases}\dfrac{-x}{x}=-1, & \text{当} -\infty < x < 0 \text{时.} \\ \dfrac{x}{x}=1, & \text{当} 0 < x < +\infty \text{时.}\end{cases}$$

2. 绝对值方程（组）

例 4 解方程 $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$.

解： $|x-1|$，$|x-2|$，$|x-3|$ 的零点分别是 1，2，3。

数轴由 1，2，3 分为四个区间，即

$(-\infty,1)$，$[1,2)$，$[2,3)$，$[3,+\infty)$.

(1) 当 $-\infty < x < 1$ 时，原方程去绝对值号后变为：

$-(x-1)-2[-(x-2)]+3[-(x-3)]=4$,

即 $x=1$，但 $x=1$ 与 $-\infty < x < 1$ 无公共部分，

$\therefore$ 当 $-\infty < x < 1$ 时方程无解。

(2) 当 $1 \leqslant x < 2$ 时，原方程变为：

$(x-1)-2[-(x-2)]+3[-(x-3)]=4$,

即 $4=4$，这说明 $[1,2)$ 中的一切 x 均适合方程，

$\therefore 1 \leqslant x < 2$ 即为原方程的解。

(3) 当 $2 \leqslant x < 3$ 时，原方程变为：

$(x-1)-2(x-2)+3[-(x-3)]=4$,

即 $-4x=-8$， $x=2$.

而 $2 \leqslant x < 3$ 与 $x=2$ 的公共部分为 $x=2$.

$\therefore$ 原方程的解为 $x=2$.

(4) 当 $3 \leqslant x < +\infty$ 时，原方程变为：

$(x-1)-2(x-2)+3(x-3)=4$,

即 $2x=10$， $x=5$.

而 $3\leqslant x<+\infty$ 与 $x=5$ 的公共部分为 $x=5$.

∴ 原方程的解为 $x=5$

综上所述，原方程的解为 $1\leqslant x\leqslant 2$，$x=5$.

例 5 解方程 $|x+1|=-x^2+x+5$.

解：$|x+1|$ 的零点为 $x=-1$，

(1) 当 $-\infty<x<-1$ 时，原方程变为：

$-(x+1)=-x^2+x+5$，

即 $x^2-2x-6=0$，$x=1\pm\sqrt{7}$.

∵ $-\infty<x<-1$，　∴ 解为 $x=1-\sqrt{7}$.

(2) 当 $-1\leqslant x<+\infty$ 时，原方程变为：

$x+1=-x^2+x+5$，　即 $x^2-4=0$，$x=\pm 2$.

∵ $-1\leqslant x<+\infty$，　∴ 解为 $x=2$

综上所述，原方程的解为 $x=1-\sqrt{7}$，$x=2$.

例 6 解方程组 $\begin{cases}|x-y|=1\\|x|+|y|=5.\end{cases}$

解：(1) 若 $x-y>0$，原方程组变为：

$$\begin{cases}x-y=1 & (1)\\|x|+|x-1|=5 & (2)\end{cases}$$

对 (2) 在区间 $(-\infty,0)$，$[0,1)$，$[1,+\infty)$ 上分别求解：

(a) 当 $-\infty<x<0$ 时，(2) 变为 $-x+[-(x-1)]=5$，

即 $-2x=4$，　$x=-2$.

∴ 原方程组的解为：$\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$.

(b) 当 $0\leqslant x<1$ 时，(2)变为 $x+[-(x-1)]=5$，

即 $1=5$． 这说明方程组无解．

(c) 当 $1\leqslant x<+\infty$ 时，(2)变为 $x+(x-1)=5$，

即 $2x=6$，　$x=3$．

∴ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$．

(2) 若 $x-y<0$，原方程组变为：

$$\begin{cases} y-x=1 & (3) \\ |x|+|x+1|=5 & (4) \end{cases}$$

对方程(4)在区间 $(-\infty,-1)$，$[-1,0)$，$[0,+\infty)$ 上分别求解，于是可得原方程组的解为：

$$\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}.$$

综上所述，原方程组有四组解：

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=-3, \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=-2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}.$$

3．绝对值不等式

例 7 解不等式

$$|x+2|-|x+1|+|x|-|x-1|+|x-2|<3.$$

解：先定出每一绝对值号内的零点并由小到大进行排列，得：-2，-1，0，1，2．这五个点把数轴分为六个区间：$(-\infty,-2)$，$[-2,-1)$，$[-1,0)$，$[0,1)$，$[1,2)$，$[2,+\infty)$．然后对原不等式分别在每一个区间上加以讨论，不难得出如下结果：

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \text{当}\ -\infty<x<-2\ \text{时},\ x>-3,\\ \quad\ \text{即}\ -3<x<-2\\ (2)\ \text{当}\ -2\leqslant x<-1\ \text{时},\ x<-1,\\ \quad\ \text{即}\ -2\leqslant x<-1\end{array}\right\}\text{合为}\ -3<x<-1.$$

$$\left.\begin{array}{l}(3)\ \text{当}\ -1\leqslant x<0\ \text{时},\ x>-1,\\ \quad\ \text{即}\ -1<x<0\\ (4)\ \text{当}\ 0\leqslant x<1\ \text{时},\ x<1,\\ \quad\ \text{即}\ 0\leqslant x<1\end{array}\right\}\text{合为}\ -1<x<1.$$

$$\left.\begin{array}{l}(5)\ \text{当}\ 1\leqslant x<2\ \text{时},\ x>1,\\ \quad\ \text{即}\ 1<x<2\\ (6)\ \text{当}\ 2\leqslant x<+\infty\ \text{时},\ x<3,\\ \quad\ \text{即}\ 2\leqslant x<3\end{array}\right\}\text{合为}\ 1<x<3.$$

综上所述，原不等式的解为：

$$-3<x<-1,\quad -1<x<1,\quad 1<x<3.$$

例 8 解不等式 $|x^2-5x+6|\leqslant x$.

解： $|x^2-5x+6|$ 的零点是 $x_1=2$，$x_2=3$.

(1) 由二次函数的性质与原式可知，当 $0<x\leqslant 2$，或 $x\geqslant 3$ 时，$x^2-5x+6\geqslant 0$.

∴ 原不等式可化为： $x^2-6x+6\leqslant 0$.

解之，得 $3-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{3}$，

再与 $x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 3$ 结合，得不等式解为：

$$3-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 2,\quad \text{或}\ 3\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{3}.$$

(2) 当 $2<x<3$ 时，原不等式化为：

$x^2-4x+6\geqslant 0$，此不等式对一切实数 x 均成立，再与 $2<x<3$ 结合，得不等式解为： $2<x<3$.

综上所述，原不等式的解为 $3-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{3}$.

4. 绝对值函数的图象

由于自变量的取值被分成若干不同的区间，因此绝对值函数在不同的区间有不同的表达式．其图象作法也应依不同区间分别来作．

例 9　分别画出 $y=|x+1|+|x|$，$y=|4x-x^2-3|$ 的图象．

解：

$$(\text{I})\ y=|x+1|+|x|=\begin{cases}-2x-1, & \text{当 } -\infty<x<-1 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } -1\leqslant x<0 \text{ 时},\\ 2x+1, & \text{当 } 0\leqslant x<+\infty \text{ 时}.\end{cases}$$

图象见图 1 中实线部分．

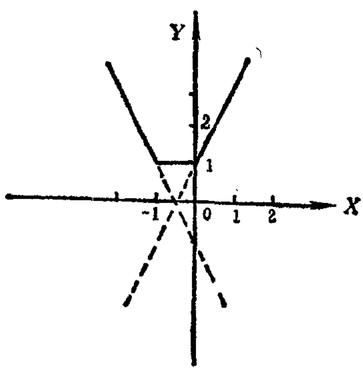


图　1

$$(\text{II})\ y=|4x-x^2-3|=\begin{cases}-x^2+4x-3, & \text{当 } 1\leqslant x\leqslant 3 \text{ 时},\\ x^2-4x+3, & \text{当 } x<1 \text{ 或 } x>3 \text{ 时}.\end{cases}$$

图象见图 2 中实线部分．

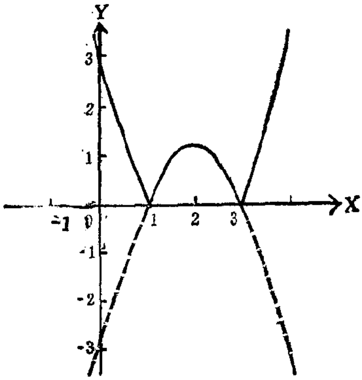


图 2

练 习 题

1. 若 $1<x<2$，化简 $\frac{|x-2|}{x-2}-\frac{|x-1|}{1-x}+\frac{|x|}{x}$. （1）

2. 解方程 $|x^2-1|=-|x|+1$. （$x=\pm1, 0$）

3. 解方程 $|-x^2+1|=-x^2+1$. （$-1\leqslant x\leqslant1$）

4. 解不等式 $|2x+1|-|2-x|>1$. $\left(x<-4;\ x>\frac{2}{3}\right)$

5. 解不等式 $|x^2-3x+2|>|x|$.

（$-\infty<x<2-\sqrt{2}$；$2+\sqrt{2}<x<+\infty$）

6. 分别作出函数 $y=|x|-2$ 与 $y=|x^2-5x+6|$ 的图象.

二、算 术 根

什么是算术根？

一个正数的 n 次方根取其正的叫做这个正数的 n 次算术根.（n 是大于 1 的整数）特别地，零的算术根为零.

根式的性质是针对算术根而言的，有以下几条：

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$　　$(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$；

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$　　$(a\geqslant 0,\ b>0)$；

3. $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$　　（$a\geqslant 0$，m 是自然数；n,p 是大于 1 的整数）；

4. $\sqrt[p]{a^{mp}}=a^m$　　（$a\geqslant 0$，m 是自然数；p 是大于 1 的整数）；

5. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　　（$a\geqslant 0$，m是自然数；n 是大于 1 的整数；当$m=n$ 时，$(\sqrt[n]{a})^n=a$）

6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　　（$a\geqslant 0$，　m,n 是大于 1 的整数）

从表面上看，算术根的概念及其性质并不难理解，但当接触到具体问题，学生往往产生不少糊涂观念. 比如：

① $\sqrt{(-3)^2}=-3$，　　② $\sqrt{(\lg 3-1)^2}=\lg 3-1$，

③ $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=1-\sqrt{2}$， ④ $\sqrt{\dfrac{-4}{-25}}=\dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-25}}$，

⑤ $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}=\sqrt[6]{(1-\sqrt{3})^2}\cdot$
$\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}=\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}=$
$\sqrt[6]{16-12}=\sqrt[6]{4}=\sqrt[3]{2}$.

上面①、②、③的结果都违背了算术根定义中对其结果的要求；④、⑤在运算中忽视了根式性质的应用范围(即针对算术根而言)；④中的$\sqrt{-4}$，$\sqrt{-25}$在实数范围内均无意义根本谈不上算术根；⑤中 $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}$ 虽有意义，但 $1-\sqrt{3}<0$，因此$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}$不是算术根．它的正确作法应是：

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}=-\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\cdot$$
$$\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}=-\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}=$$
$$-\sqrt[6]{16-12}=-\sqrt[6]{4}=-\sqrt[3]{2}$$

为了正确理解和恰当地运用算术根的概念应特别注意以下三点：

(1) 被开方数$\geqslant0$，(2) 方根$\geqslant0$，(3) 根式的一系列性质是针对算术根而言的．特别是对负数的奇次方根进行恒等变形时，须先把它变为被开方数是正数的同次方根（如：$\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}$，$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}=-\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$，……），然后再应用根式的性质进行变换．

下面就把初中阶段所接触到的有关算术根的问题用例子加以说明．

1．根式的化简和计算

从事根式的化简和运算要紧紧扣住算术根的定义和运算

法则中的规定，同时结合原式中所涉及到的有关概念和性质来进行。

(1) 关于常量的算术根问题

例1　化简$\sqrt{(-5)^2}$，$\sqrt{7-4\sqrt{3}}$。

解：$\sqrt{(-5)^2}=5$，$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}$。

(经分析直接得出非负结果)

例2　计算$\sqrt[3]{-2}\cdot\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{12}$。

解：$\sqrt[3]{-2}\cdot\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{12}=-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{12}=$

$-\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{12}=-\sqrt[6]{12}+\sqrt[6]{12}=0$。

(注意把$\sqrt[3]{-2}$变为$-\sqrt[3]{2}$后再用法则)

例3　化简$\sqrt{\left(\log_3\frac{1}{9}\right)^2}$，$\sqrt{\lg^2 5-2\lg 5+1}$。

解：$\sqrt{\left(\log_3\frac{1}{9}\right)^2}=\sqrt{(-2)^2}=2$，

$\sqrt{\lg^2 5-2\lg 5+1}=\sqrt{(\lg 5-1)^2}=1-\lg 5$。

($\because 1>\lg 5$)

(运用对数的概念)

例4　化简$\sqrt{1-2\sin 50°\cdot\cos 50°}$。

解：$\sqrt{1-2\sin 50°\cdot\cos 50°}=\sqrt{(\sin 50°-\cos 50°)^2}$

$=\sin 50°-\cos 50°$。

($\because \sin 50°>\cos 50°$)