College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

同济大学应用数学系 编

高等数学
习题全解指南（下册）

同济·四、五版

高等教育出版社

大学数学学习辅导丛书

高等数学习题全解指南

同济·四、五版(下册)

同济大学应用数学系　编

高等教育出版社

内容提要

本书是与同济大学应用数学系主编的《高等数学》第四、五版相配套的学习辅导书，由同济大学应用数学系的教师编写. 本书内容由三部分组成，第一部分是按《高等数学》（下册）的章节顺序编排，给出习题全解. 部分题目在解答之后对该类题的解法作了小结、归纳，有的提供了多种解法；第二部分是全国硕士研究生入学考试数学试题选解，所选择的试题以工学类为主，少量涉及经济学类试题；第三部分是同济大学高等数学考卷选编，以及考题的参考解答.

本书对教材具有相对的独立性，可为工科和其他非数学类专业学生学习以及准备报考硕士研究生的人员复习高等数学提供解题指导，也可供讲授《高等数学》的教师在备课和批改作业时参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解指南.（下册）：同济·四、五版/同济大学应用数学系编. —北京：高等教育出版社，2003.7

ISBN 7-04-011992-7

Ⅰ.高… Ⅱ.同… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 025207 号

策　划　张忠月　编　辑　胡乃冏　封面设计　王凌波　责任绘图　吴文信
版式设计　王艳红　责任校对　朱惠芳　责任印制　杨　明

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　销　新华书店北京发行所
排　版　高等教育出版社照排中心
印　刷　国防工业出版社印刷厂

开　本	787×960　1/16	版　次	2003 年 7 月第 1 版
印　张	23.5	印　次	2003 年 7 月第 1 次印刷
字　数	430 000	定　价	24.60 元

目　　录

一、《高等数学》(第五版)(下册)习题全解

二、硕士研究生入学考试数学试题选解

三、同济大学《高等数学》试卷选编

一、《高等数学》(第五版)(下册)习题全解

第八章　多元函数微分法及其应用

习　题　8－1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集(称为导集)和边界.

(1) $\{(x,y)\mid x\neq 0, y\neq 0\}$；　　(2) $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$；

(3) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$；

(4) $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$.

解　(1) 集合是开集，无界集；导集为 $\mathbf{R}^2$，边界为 $\{(x,y)\mid x=0$ 或 $y=0\}$.

(2) 集合既非开集，又非闭集，是有界集；导集为 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$，边界为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$.

(3) 集合是开集，区域，无界集；导集为 $\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，边界为 $\{(x,y)\mid y=x^2\}$.

(4) 集合是闭集，有界集；导集为集合本身，边界为 $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2=4\}$.

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$.

解　$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\tan\dfrac{tx}{ty}=t^2(x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y})$

$=t^2f(x,y)$.

3. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

证　$F(xy,uv)=\ln(xy)\cdot\ln(uv)=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$

$=\ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v$

$=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$.

4. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

解　$f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{(x+y)+(x-y)}=(x+y)^{xy}+$

$(xy)^{2x}$.

5. 求下列各函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$； (2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$； (4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}(R>r>0)$；

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) $\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}$.

(2) $\{(x,y)\mid x+y>0,x-y>0\}$.

(3) $\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2\geqslant y\}$.

(4) $\{(x,y)\mid y-x>0,x\geqslant 0,x^2+y^2<1\}$.

(5) $\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$.

(6) $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2-z^2\geqslant 0,x^2+y^2\neq 0\}$.

注 本题是求多元函数的定义域，与求一元函数的定义域相类似，先写出构成该函数的各个简单函数的定义域，再求出表示这些定义域的集合的交集，即得所求定义域.

6. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$； (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$； (4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$； (6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解 (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0}{0+1}=1$.

注 本题利用多元初等函数的连续性求极限，即极限值等于函数值.对于多元初等函数在点 P_0 处的极限，若 P_0 在该函数的定义区域内，均可利用此方法求极限.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}}=\ln 2$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}.$$

注 本题分母的极限为零，不能运用商的极限运算法则，而采用通过分母或分子有理化等方法，消去分母中趋于零的因子，再运用极限运算法则，这是求极限的基本方法之一.

(4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(xy+1)-1}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{xy+1}+1) = 2.$$

(5) $$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x = 1\cdot 2 = 2.$$

注 本题利用 $\sin(xy)\sim xy\ ((x,y)\to(2,0))$，相当于令 $u=xy$，当 $(x,y)\to(2,0)$ 且 $y\neq0$ 时，有 $u=xy\to0$，且 $u\neq0$，于是

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u} = 1.$$

(6) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

注 本题利用 $1-\cos(x^2+y^2)\sim\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2\quad((x,y)\to(0,0))$.

7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证 (1) 当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to0}\frac{(1+k)x}{(1-k)x} = \frac{1+k}{1-k}\quad(k\neq1).$$

显然它是随着 k 的值不同而改变的，故所求极限不存在.

(2) 依次取 $(x,y)\to(0,0)$ 的两种方式：$y=x$，$y=-x$，分别求极限：

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4} = 1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+4x^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+4} = 0.$$

两种方式求得的极限值不同，故所求极限不存在.

注 本题证明极限不存在所采用的方法是：找出两条不同的路径，使得点 P 沿这两条路径趋于 P_0 时，$f(P)$ 的极限存在但不相等；或者找出一条特殊的路径，使得点 P 沿这路径趋于 P_0 时，$f(P)$ 的极限不存在. 这是证明多元函数极限

不存在常用的方法.

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$在何处是间断的?

解 这函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid y^2-2x\neq 0\}$,曲线 $y^2-2x=0$ 上各点均为 D 的聚点,且函数在这些点处没有定义,因此曲线 $y^2-2x=0$ 上各点均为函数的间断点.

9. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证 因为 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$,

要使 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$,只要$\sqrt{x^2+y^2}<2\varepsilon$,

所以 $\forall\,\varepsilon>0$,取 $\delta=2\varepsilon$,则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,就有 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$

成立,即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

10. 设 $F(x,y)=f(x)$,$f(x)$在 x_0 处连续,证明:对任意 $y_0\in R$,$F(x,y)$在(x_0,y_0)处连续.

证 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$,因为 $f(x)$在 x_0 处连续,所以 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.从而,当 $P(x,y)\in U(P_0,\delta)$时,$|x-x_0|\leqslant\rho(P,P_0)<\delta$,因而有

$$|F(x,y)-F(x_0,y_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 $F(x,y)$在(x_0,y_0)处连续.

习 题 8-2

1. 求下列函数的偏导数:

(1) $z=x^3y-y^3x$;　　(2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$;

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$;　　(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$;

(5) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$;　　(6) $z=(1+xy)^y$;

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$;　　(8) $u=\arctan(x-y)^z$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$.

(2) $\frac{\partial s}{\partial u}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2)\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial}{\partial u}(uv)}{(uv)^2}=\frac{2u^2v-(u^2+v^2)v}{u^2v^2}$

$=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2}$,

$\frac{\partial s}{\partial v}=\frac{\frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2)\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial}{\partial v}(uv)}{(uv)^2}=\frac{2uv^2-(u^2+v^2)u}{u^2v^2}$

$=\frac{1}{u}-\frac{u}{v^2}$.

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot x=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$.

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y$

$=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot x$

$=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$.

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\cot\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\cot\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}$.

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[e^{y\ln(1+xy)}]=(1+xy)^y[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}]$.

(7) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

(8) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

2. 设 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,求证 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

证 因为 $\frac{\partial T}{\partial l}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot\frac{1}{g}=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}$,

$$\frac{\partial T}{\partial g}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot\left(-\frac{l}{g^2}\right)=-\frac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{g}},$$

所以 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}-\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=0$.

3. 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$,求证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

证 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$,

所以 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z$.

4. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$,求 $f_x(x,1)$.

解 $f_x(x,y)=1+\frac{y-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}$,

$f_x(x,1)=1$.

5. 曲线 $\begin{cases} z=\frac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$ 在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的倾角是多少?

解 按偏导数的几何意义,$f_x(2,4)$就是曲线在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的斜率,而 $f_x(2,4)=\frac{1}{2}x\big|_{x=2}=1$,即 $k=\tan\alpha=1$,于是倾角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

6. 求下列函数的$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$:

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$;

(2) $z=\arctan\frac{y}{x}$;

(3) $z=y^x$.

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$, $\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$, $\quad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(4x^3-8xy^2)=-16xy.$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\cdot\ln^2 y$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^x\ln y)=y^{x-1}(1+x\ln y).$$

7. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，

求 $f_{xx}(0,0,1),f_{xz}(1,0,2),f_{yz}(0,-1,0)$ 及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

解 因为 $f_x=y^2+2xz,f_{xx}=2z,f_{xz}=2x$，

$f_y=2xy+z^2,f_{yz}=2z$，

$f_z=2yz+x^2,f_{zz}=2y,f_{zzx}=0$.

所以 $f_{xx}(0,0,1)=2,f_{xz}(1,0,2)=2,f_{yz}(0,-1,0)=0$，

$f_{zzx}(2,0,1)=0$.

8. 设 $z=x\ln(xy)$，求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\frac{y}{xy}=\ln(xy)+1$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x},\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y},\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}.$$

9. 验证：

(1) $y=e^{-kn^2t}\sin nx$ 满足 $\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$；

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

证 (1) 因为 $\frac{\partial y}{\partial t}=-kn^2e^{-kn^2t}\sin nx,\frac{\partial y}{\partial x}=ne^{-kn^2t}\cos nx$，

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(ne^{-kn^2t}\cos nx)=-n^2e^{-kn^2t}\sin nx,$$

所以 $\frac{\partial y}{\partial t}=k(-n^2e^{-kn^2t}\sin nx)=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

(2) 因为 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{x}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=\frac{r^2-x^2}{r^3}$,

由函数关于自变量的对称性,得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3},$$

所以 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}=\frac{2}{r}$.

习　题　8-3

1. 求下列函数的全微分:

(1) $z=xy+\frac{x}{y}$;

(2) $z=e^{\frac{y}{x}}$;

(3) $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(4) $u=x^{yz}$.

解　(1) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y},\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$,

所以 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy$.

(2) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$,

所以 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}(ydx-xdy)$.

(3) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

所以 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(ydx-xdy)$.

(4) 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=yzx^{yz-1},\frac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x,\frac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x$,

所以 $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln x dy+yx^{yz}\ln x dz$.

2. 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1,y=2$ 时的全微分.

解 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{2}{3},$$

所以 $\mathrm{d}z\big|_{\substack{x=1\\y=2}}=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x+\dfrac{2}{3}\mathrm{d}y$.

3. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z=\dfrac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\dfrac{y}{x},\mathrm{d}z=-\dfrac{y}{x^2}\Delta x+\dfrac{1}{x}\Delta y$.

当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时,

全增量 $\Delta z=\dfrac{1+(-0.2)}{2+0.1}-\dfrac{1}{2}=-0.119$,

全微分 $\mathrm{d}z=-\dfrac{1}{4}\cdot 0.1+\dfrac{1}{2}\cdot(-0.2)=-0.125$.

4. 求函数 $z=\mathrm{e}^{xy}$ 当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时的全微分.

解 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y=y\mathrm{e}^{xy}\Delta x+x\mathrm{e}^{xy}\Delta y$.

当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时,

全微分 $\mathrm{d}z=\mathrm{e}\cdot 0.15+\mathrm{e}\cdot 0.1=0.25\,\mathrm{e}$.

*5. 计算 $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$ 的近似值.

解 设 $z=\sqrt{x^3+y^3}$,则

$$\sqrt{(x+\Delta x)^3+(y+\Delta y)^3}=\sqrt{x^3+y^3}+\Delta z\approx\sqrt{x^3+y^3}+\mathrm{d}z$$
$$=\sqrt{x^3+y^3}+\frac{3x^2\Delta x+3y^2\Delta y}{2\sqrt{x^3+y^3}}.$$

取 $x=1,y=2,\Delta x=0.02,\Delta y=-0.03$,可得

$$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}\approx\sqrt{1+2^3}+\frac{3\cdot1\cdot0.02+3\cdot2^2\cdot(-0.03)}{2\sqrt{1+2^3}}=2.95.$$

*6. 计算 $(1.97)^{1.05}$ 的近似值($\ln 2=0.693$).

解 设 $z=x^y$,则

$$(x+\Delta x)^{y+\Delta y}=x^y+\Delta z\approx x^y+\mathrm{d}z=x^y+yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\cdot\Delta y.$$

取 $x=2,y=1,\Delta x=-0.03,\Delta y=0.05$,可得

$$(1.97)^{1.05}\approx 2-0.03+2\ln 2\cdot 0.05=1.97+0.0693\approx 2.039.$$

*7. 已知边长为 $x=6$ m 与 $y=8$ m 的矩形,如果 x 边增加 5 cm 而 y 边减

少 10 cm,问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

解 矩形的对角线的长为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\Delta z\approx dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\Delta x+y\Delta y).$$

当 $x=6,y=8,\Delta x=0.05,\Delta y=-0.1$ 时,

$$\Delta z\approx\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}(6\cdot 0.05-8\cdot 0.1)=-0.05,$$

即,这个矩形的对角线的长减少大约 5 cm.

*8. 设有一无盖圆柱形容器,容器的壁与底的厚度均为 0.1 cm,内高为 20 cm,内半径为 4 cm.求容器外壳体积的近似值.

解 圆柱体的体积公式为 $V=\pi R^2H$,圆柱形容器的外壳体积就是圆柱体体积 V 的增量 ΔV,而

$$\Delta V\approx dV=\frac{\partial V}{\partial R}\Delta R+\frac{\partial V}{\partial H}\Delta H=2\pi RH\Delta R+\pi R^2\Delta H.$$

当 $R=4,H=20,\Delta R=\Delta H=0.1$ 时

$$\Delta V\approx 2\cdot 3.14\cdot 4\cdot 20\cdot 0.1+3.14\cdot 4^2\cdot 0.1\approx 55.3,$$

即,容器外壳的体积大约是 55.3 cm^3.

*9. 设有直角三角形,测得其两直角边的长分别为 7 ± 0.1 cm 和 24 ± 0.1 cm.试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边长度分别为 x 和 y,则斜边长度为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$|\Delta z|\approx|dz|=\left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right|\leqslant\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right||\Delta y|=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$(x|\Delta x|+y|\Delta y|)\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x+y\delta_y),$$

便得

$$\delta_z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x+y\delta_y).$$

当 $x=7,y=24,\delta_x=0.1,\delta_y=0.1$ 时,

$$\delta_z=\frac{1}{\sqrt{7^2+24^2}}(7\cdot 0.1+24\cdot 0.1)=0.124.$$

即,计算斜边长度 z 的绝对误差约为 0.124 cm.

*10. 测得一块三角形土地的两边边长分别为 63 ± 0.1 m 和 78 ± 0.1 m,这两边的夹角为 $60°\pm 1°$.试求三角形面积的近似值,并求其绝对误差和相对误差.

解 设三角形的两边长分别为 a 和 b,它们的夹角为 θ,则三角形的面积为

$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$,

$$|\Delta S|\approx|\mathrm{d}S|=\left|\frac{\partial S}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial S}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial S}{\partial \theta}\Delta\theta\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{\partial S}{\partial a}\right||\Delta a|+\left|\frac{\partial S}{\partial b}\right||\Delta b|+\left|\frac{\partial S}{\partial \theta}\right||\Delta\theta|$$
$$=\frac{1}{2}b\sin\theta|\Delta a|+\frac{1}{2}a\sin\theta|\Delta b|+\frac{1}{2}ab\cos\theta|\Delta\theta|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}b\sin\theta\delta_a+\frac{1}{2}a\sin\theta\delta_b+\frac{1}{2}ab\cos\theta\delta_\theta,$$

便得

$$\delta_S=\frac{1}{2}b\sin\theta\delta_a+\frac{1}{2}a\sin\theta\delta_b+\frac{1}{2}ab\cos\theta\delta_\theta.$$

当 $a=63,b=78,\theta=\frac{\pi}{3},\delta_a=0.1,\delta_b=0.1,\delta_\theta=\frac{\pi}{180}$时,三角形面积的近似值为

$$S=\frac{1}{2}\cdot 63\cdot 78\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2\ 127.8(\mathrm{m}^2),$$

绝对误差为

$$\delta_S=\frac{1}{2}\cdot 78\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0.1+\frac{1}{2}\cdot 63\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0.1+\frac{1}{2}\cdot 63\cdot 78\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180}=27.6(\mathrm{m}^2),$$

相对误差为

$$\frac{\delta_S}{S}=\frac{27.6}{2\ 127.8}=1.30\%.$$

*11. 利用全微分证明:两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

解 设 $u=x+y$,则

$$|\Delta u|\approx|\mathrm{d}u|=\left|\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right|=|\Delta x+\Delta y|\leqslant|\Delta x|+|\Delta y|\leqslant\delta_x+\delta_y,$$

便得

$$\delta_u=\delta_x+\delta_y,$$

即两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

*12. 利用全微分证明:乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和;商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

解 设 $u=xy,v=\frac{x}{y}$,则

$$|\Delta u|\approx|\mathrm{d}u|=|y\Delta x+x\Delta y|\leqslant|y||\Delta x|+|x||\Delta y|\leqslant|y|\delta_x+|x|\delta_y,$$