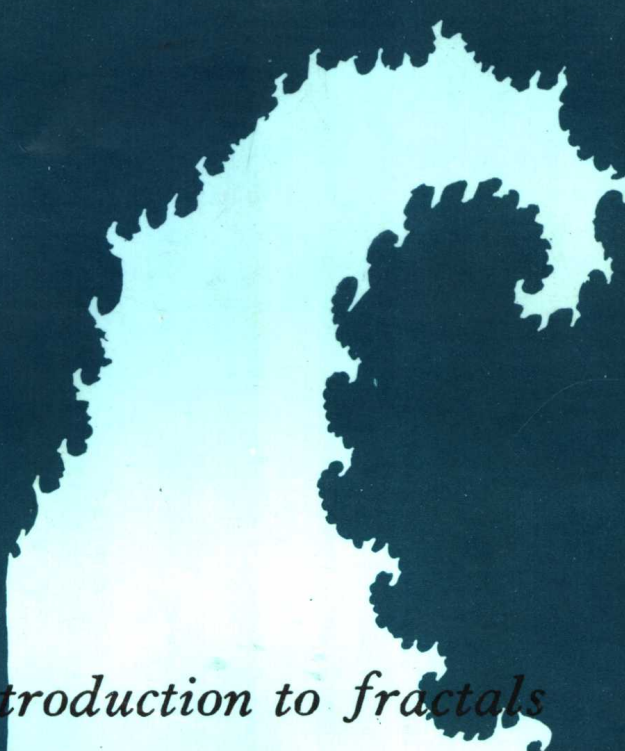


● 内蒙古师范大学学术专著出版基金资助



Introduction to fractals

分形学导论

敖力布 林鸿溢 主编

● 内蒙古人民出版社

分形学导论

江苏工业学
藏书

主编 敖力布 林鸿溢

副主编 梅其其格

参编 魏冉照 吴群英

姜吉国 吴群华

内蒙古人民出版社

呼和浩特

一九九六·九

分形学导论

敖力布 林鸿溢

*

内蒙古人民出版社出版发行

(呼和浩特市新城西街 82 号)

内蒙古新华印刷厂科技分厂印刷

开本: $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ 印张: 16.75 字数: 412 千 插页: 2

1996 年 9 月第一版 1996 年 9 月第 1 次印刷

ISBN7-204-03210-1/G · 664 每册: 23.50 元

内蒙古自治区自然科学基金资助

内蒙古师范大学学术专著出版基金资助

内 容 提 要

这是一本介绍分形学和非线性科学及其应用的专著，也是一本教学与科研的有价值的参考书，系统地介绍了分形学的创立过程、基本概念、原理和计算技巧。系统地讨论了分形及其分维、规则分形和随机分形及其构造方法，混沌及其特征、湍流和自组织、非线性科学及非线性系统、奇怪吸引子种种，子波变换及其在动力系统中的应用，分维的计算及测量的新方法，自相似性及测度，费根鲍姆序列及两种常数，李雅普诺夫指数，分数 Brown 运动及 Brown 曲面，高分子的分形分析等。论述和探讨了分形学在物理学、化学、数学、生物学、生理学、医学、地震学、气象学、材料科学，石油开采，断裂以及社会科学中的经济、管理、情报、股票价格、人口学、人文地理等领域中的应用。书末还给出最近各研究领域中的新的研究成果及其相关的参考文献。

本书的读者对象是大学师生、研究生、科技工作者、管理者、经济（商业）工作者和新学科爱好者。

前 言

分形学是一门研究分形体的几何特征、数量表征及其普适性的科学，它与拓扑学、概率论和随机过程密切相关，分形学既是前沿学科又是边缘学科和综合学科，在分形学和非线性科学的应用及发展过程中计算机起着重大作用。

分形学的划时代意义就在于它是当代新学术思潮中的璀璨明珠，它补充了传统微积分学而代之以计算机的数值解和模拟，分形学是计算机时代的产物，它实则研究不可积系统几何图形的自相似性质。

分形学早已跳出数学的范围而深入到物理、化学、生物、医学、材料科学、地质、地震、工程技术、气象预报、石油勘探、流体力学以及断裂等各个领域，还在社会科学、哲学、经济学、文学艺术、装潢设计、音乐电影等行业中产生了深刻影响。在传统科学感到困惑的地方，在一切被认为神秘莫测的领域，分形学大显神通，运用自如，硕果累累。科学史专家伯纳德、科恩把分形学的创立人曼德布罗特与爱恩斯坦相提并论，有些人认为分形学的创立与微积分的发明相当，是一个科学的里程碑，许多人把分形学看成 20 世纪相对论和量子力学之后的第三大科学理论，是现代科学的最前沿。

分形学产生于 70 年代中期，其研究对象是自然界、人类社会和思维活动中广泛存在着的无序（随机和无规则）而具有自相似性的系统。分形学借助相似性原理洞察隐藏于混乱之中的精细结构，为人类提供了从局部认知整体，从有限认知无限的新方法论和世界观；为不同学科发展的规律性以及相互渗透和结合提供了暂新的途径和定量描述；为现代科学技术提供了新语言，新思想

和新方法。分形学正起着把现代科学各个领域连接起来的作用。

人们把分形学、耗散结构和混沌理论称为 70 年代科学的三大发现。几十年的发展表明,分形学正被众多学科竞相引用,它以新的驱动力推动着各相关学科的发展。宇宙中不同领域之间存在着惊人的相似性,物质世界是复杂的,但它具有受分形学规律所制约的多层次结构,在这里传统的物理学、数学、化学和生物学等学科是无能为力的。人们知道,定性说明和定量描述自然界真实构象和非线性本质是学习众多学科的伊始,分形学是一门新学科,所以大学师生、自然科学工作者和社会科学工作者应该学习和掌握它的基本概念、基本规律和思路方法,以便开拓视野,启迪思维,激发创造功能,这是本书作者的愿望与动力所在。

为使本书成为一本学习分形学的指导性读物,在编写过程中参考了国内外最新资料,内容的编辑上尽量由浅入深,循序渐进。本书共十二章,大致分三部分,首先阐述了分形学的基本概念、理论和原理,包括分形学创立过程、分形(规则分形和随机分形)及其构造方法、分形维数和计算技巧、混沌现象及其特征、湍流和自组织、奇怪吸引子种种,小波变换,近些年来发展起来的计算和测量分维的新方法,大自然本身描绘的曲线和曲面,动力系统的小波变换等。其次介绍了分形学的应用及所得成果,包括分形学在物理、数学及化学等各相关学科中的应用,地震、气象、材料科学和石油开采中的应用及所得成果,社会科学各领域中的研究进展。在附录中还给出最新的研究趋势和方向以及相应的参考文献。第三部分是我们的一些研究成果。

必要的几何图形能够帮助理解概念和理论。本书中适量的插图使书的内容更加丰富和多彩。我们在编写本书的过程中既注意定性说明与定量计算的结合,又尽量减少纯数学的推演。

近年来,国外出版了不少的有关分形学的专著,国内也有几本这方面的译著和专著出版,这对分形学的普及与发展起到了很

好的作用。分形学及其应用发展很快，新理论新成果层出不穷，日新月异，愿这本书能为普及和提高分形学及非线性科学知识方面发挥一些作用。

全书由敖力布执笔，本书初稿是1994年敖力布给内蒙古师范大学部分师生和社会上一些科研工作者讲授《分形学系列讲座》时使用的讲稿为基础；还参考了我们的专著《分形论——奇异性探索》（林鸿溢、李映雪编著）的部分内容编写而成。书稿的完成还得益于李后强、汪富泉等广大分形学界专家，学者的优秀专著和开拓性科研成果。书中还介绍了在分形学创立和发展过程中做出贡献的中外著名专家学者。由于我们的水平不高，书中难免有缺点、错误和欠妥之处，敬请读者批评指正。

作 者

1996年9月于呼和浩特

目 录

1 新兴学科——分形学及其创立过程	(1)
1. 1 分形学的创立是一场科学革命	(2)
1. 2 分形学的提出 什么是分形	(5)
1. 3 数学符号 集合及其运算	(12)
1. 4 分形学的发展及研究趋势	(15)
1. 5 不规则形体内在规律特征的新认识	(17)
1. 6 如何理解分形产生的物理机制和分维	(18)
2 分形的维数	(20)
2. 1 拓扑维数与豪斯道夫维数	(20)
2. 2 关于分形的维数	(25)
2. 3 谱维数 分数维时空	(45)
2. 4 分形维数的计算方法	(56)
2. 5 分维的测量方法简介	(58)
2. 6 随尺度和范围变化的分数维	(79)
2. 7 维数印刷	(82)
2. 8 Alexander——orbach 猜想	(85)
3 数学家的创造——规则分形	(88)
3. 1 康托尔三分集 康托尔尘埃及其维数	(88)
3. 2 三种谢尔宾斯基线集	(95)
3. 3 人造海绵——谢尔宾斯基面集	(98)
3. 4 科赫魔线	(99)
3. 5 魔岛边界	(103)
3. 6 皮亚诺曲线	(106)

3. 7	规则分形小结	(108)
3. 8	谢尔宾斯基地毯的自仿射构造及其分数	(110)
3. 9	几种例子	(113)
4	自然界的构型——随机分形	(120)
4. 1	随机性 决定性与不可逆性概述	(120)
4. 2	自相似性存在的区域	(121)
4. 3	埃伦法斯特夫妇的“罐子模型”	(125)
4. 4	随机分形的典范——海岸线	(126)
4. 5	随机分形的典型——城市边界	(129)
4. 6	布朗微粒的随机行走	(134)
4. 7	拉普拉斯分形的生长及其分维	(136)
5	自相似性和测度	(146)
5. 1	自相似性 自相似集	(146)
5. 2	自相似变换	(147)
5. 3	分形学中的原理	(153)
5. 4	广义体积	(161)
5. 5	系统的容度 闵可夫斯基“香肠”	(163)
5. 6	Hausdorff 测度 μ_D 几种特殊测度	(166)
5. 7	分形的归类及几种分形(胖分形)定义	(171)
5. 8	多重分形的 $\alpha-f(\alpha)$ 语言和 $q-D_q$ 语言	(184)
5. 9	多重分形与统计热力学类比	(187)
5. 10	多重分形实例	(190)
5. 11	分形的射影、乘积、交和分形渗流	(195)
5. 12	多重分形与定域系统	(204)
6	混沌现象及其特征	(211)

6. 1	如何理解混沌·····	(211)
6. 2	什么是混沌 混沌的特征·····	(215)
6. 3	混沌如何产生·····	(220)
6. 4	几种曲型混沌系统·····	(223)
6. 5	对初始条件的依赖性·····	(233)
6. 6	非线性科学 孤子 (孤波) 简介·····	(235)
6. 7	通向混沌的分岔道路·····	(243)
6. 8	非平衡是有序的源泉·····	(247)
6. 9	映射 $Z \rightarrow z^2 + C$ ·····	(248)
6. 10	逻辑斯缔映射 ·····	(254)
6. 11	费根鲍姆序列 两种费根鲍姆常数 ·····	(260)
6. 12	四维时空中的超混沌流 ·····	(265)
6. 13	混沌游戏 ·····	(267)
6. 14	柯尔莫哥洛夫熵 关联维数及其计算 ·····	(269)
6. 15	李雅普诺夫指数 ·····	(273)
6. 16	物理学中的非线性与线性 ·····	(282)
7	湍流及奇怪吸引子 ·····	(290)
7. 1	湍流和自组织·····	(290)
7. 2	奇怪吸引子·····	(294)
7. 3	谁发现了第一个奇怪吸引子·····	(300)
7. 4	流映射 奇怪吸引子和面包师变换·····	(306)
7. 5	奇怪吸引子种种 (一) ·····	(318)
7. 6	奇怪吸引子种种 (二) ·····	(330)
7. 7	耗散流的吸引子和简单吸引子·····	(341)
7. 8	复映射的吸引子与吸引盆·····	(346)
7. 9	依农怪吸引子 茹厄勒的怀疑·····	(356)
7. 10	吸引域的分形边界和庞加莱映象 ·····	(358)

7. 11	自然界中的噪声及其分形结构	(361)
8	富里叶变换与子波变换	(368)
8. 1	传统富里叶级数展开和富氏变换	(369)
8. 2	富氏变换的缺点及子波变换	(373)
8. 3	关于多分辨分析 (multiresolution analysis)	(377)
8. 4	分形学中常用的几种解析小波	(379)
8. 5	高维小波的定义法	(380)
8. 6	小波函数的正则性	(382)
8. 7	正交小波和广义 de Rham 函数	(385)
9	大自然本身描绘的曲线和曲面	(392)
9. 1	无规行走	(392)
9. 2	指数在 $[0, 1]$ 之间的运动轨迹	(395)
9. 3	R/S 方法及频谱分析法	(399)
9. 4	地貌, 云彩的逼真模拟	(402)
9. 5	两种信号模型	(405)
10	分形系统的子波变换	(411)
10. 1	测度与相关性	(411)
10. 2	康托尔集的符号序列	(415)
10. 3	分岔环与特征时间	(418)
10. 4	两种圆映射	(420)
10. 5	具有均匀码尺的雪花分形	(423)
10. 6	具有非均匀码尺的雪花分形	(425)
10. 7	扩散凝聚集团的子波变换	(428)
10. 8	锌铜沉积集团的子波变换	(431)

10. 9	动力系统小因子理论	(435)
11	分形物理与分形化学	(437)
11. 1	分形学在物理研究中的应用	(438)
11. 2	分形声源的噪声及其污染	(443)
11. 3	白噪声、分形噪声与仪器的灵敏度	(450)
11. 4	表面分形及其分维测量	(453)
11. 5	高分子的分形结构及其分维	(456)
11. 6	地震的 G—R 关系式与三种广义分维	(461)
12	新方法 新材料	(472)
12. 1	如何计算无标度域	(472)
12. 2	如何计算分形曲线的维数	(476)
12. 3	如何计算平面分形图的分维	(479)
12. 4	如何计算分形曲面的分维	(481)
12. 5	如何计算时间序列分维	(482)
12. 6	纳米硅薄膜分形凝聚模型	(488)
12. 7	纳米硅薄膜的生长动力学与计算模拟	(497)
	附录	(506)
	参考文献总目录	(510)
	后记	(525)

1 新兴学科——分形学及其创立过程

现实世界的几何体——分形。

分形学是跨学科的新兴学科，它是非线性科学中的一个活跃的分支。

近年来分形学的理论研究和应用开发方兴未艾，深入到各传统学科的所有未知领域。科学上飞速发展的当今世界，逐步形成着各种新学科以迎接世界未来的挑战，分形学诞生在多种新学科和新方法的相互冲击并汇合的当代。分形学使人们对自然界和人类社会的认识提高到一个崭新的高度⁽⁶⁵⁾。

非线性科学研究，似乎总是把人们从对“正常”事物、“正常”现象的认识转向对“反常”事物、“反常”现象的探索。孤波不是周期性振荡的规则传播，混沌打破了确定性方程由初始条件严格确定系统未来运动的“常规”。然而，这些貌似不正常的探索都使人们的认识更接近自己的研究对象——自然界本身。近20年来分形学的研究又把人们引到了对现实世界几何体——分形的探索，引导人们去研究那些不能用通常的长度、面积和体积去表示的非规则几何物体的性质。

自然界的许多事物具有自相似的层次结构，在理想情况下甚至是无穷多层次。适当放大或缩小其几何尺寸，整个结构并不改变。具有这类结构的几何体称为分形，描述分形的各种特性及其应用的研究科学称为分形学，许多复杂的物理系统及其性质，实际上都由分形学去描述最为逼真。

虽然早在本世纪初，数学家就为分形几何学准备了最基本的概念，但其影响还只限于少数数学家的圈子里。近20年来，主要

由于美国科学家曼德布罗特的持续努力，分形学的研究成为“热门”，进入了自然科学和工程技术以及社会科学各个领域，同时也成了一门新艺术，开阔了人们对自然界结构形式的认识。

本章我们简要回顾一下分形学及其创立过程和分形学的发展趋势，从而对分形学有个大概的历史的了解。

1.1 分形学的创立是一场科学革命

非线性科学是近几十年在各门以非线性为特征的子学科研究基础上逐渐形成的。它是旨在揭示非线性系统的共同性质、基本特征和运动规律的跨学科的一门综合性基础科学。分形学是非线性科学中的一支活跃分支，它所研究的对象是在非线性系统中产生的不光滑和不可微的几何形体，对应的参数是分形维数。

分形学的初创形式是分形几何学，它是刻画混沌运动的直观几何语言，实际上它是更接近现实世界的数学，比传统的几何学和数学优越得多。分形学的创立对传统的科学进行了一场革命。现在我们所说的分形学实则溶入了许多非线性科学的内容，吸收了许多相邻学科的最新发展和成果，比如早些发展起来的重整化群技术和符号动力学等。

在非线科学^[65]中人们感兴趣的是混沌现象^{[46][50-52]}，它是从决定论到非决定论的一个渡越，混沌的根源是系统的非线性而不是外界扰动，认识到这一点是一个非常重要非常不容易的突破。70年代自然科学的三大发明是混沌、耗散结构和分形学，将分形学应用到混沌现象的研究之中后发现，分维已经成了描述混沌的一个定量参数。分形学是研究混沌的重要支撑。美国著名科学家约翰·惠勒(J. A. Wheeler)说过“今天谁不知道高斯分布或熵概念的意义和范围，谁就不能被认为是科学上的文化人，同样可以相信，明天谁不熟悉分形，谁也将不能被认为是科学上的文化

人”。因此可以认为，分形学的创立及其跟混沌学的结合已经成为相对论和量子论以来本世纪第三次科学革命。

分形学从另一个极端弥补了传统科学的不足之处同时给人类深刻的启迪。许多研究表明，分形学所得出的结果跟普利高津创立的耗散结构理论和哈肯创立的协同学原理所得出的结果是吻合的，它是人类对自然界的认识水平和能力提高到一定层次上的产物。分形学打破了传统学科界限的壁垒，它的创始人是美国科学家曼德布罗特^[9]。

曼德布罗特生于1924年华沙的一个犹太人家庭，其父亲是一个商人，母亲是牙科医生，他在少年时代所受的教育不那么正规。他曾在大学里教过书，也在公司里当过工程师，在此期间曾遇到过电话线中的噪声问题，他在处理这一问题时发现，虽然可以加强信号来淹没一些噪声，但有些噪声仍无法消除。曼德布罗特遇到的这一问题如果抽象化为数学问题，那么正是19世纪以数学家康托尔命名的抽象构造的康托尔集。这种抽象康托尔集的分析给人们以提示，对上述噪声不应加强信号而是应采用适当的信号。

1960年曼德布罗特到哈佛大学讲课时发现了经济模式中高低收入的分布图与棉花价格变化图完全一样，他采取了一种特殊变换尺度来分析棉花价格变化的内在序列时发现，尽管棉价每次的变化是随机的，但价格的日变化和月变化的曲线竟然完全一致，这说明大量的无序数据中存在着一种出乎意料的有序规律。

曼德布罗特研究海岸线的长度问题时提出惊人的论点，任何一段海岸线的长度都是无穷大，虽然海岸线长度不能精确测量，但它有特征量——分形维数，分维可以对分形对象内部不均匀性，层次结构的整体数量特征等性质进行刻划。

事实上，关于分形思想早在古代就已经开始萌芽^[39]，到了20世纪60年代以来曼德布罗特发表了一系列重要文章，使分形思想具体化、系统化和科学化，他的开创性著作《自然界的分形几

何》的出版，标志着分形理论的正式形成。曼德布罗特在美国定居后，1958 年开始了他的研究生涯，1967 年他在美国《科学》杂志上发表了题为“英国的海岸线有多长？”的论文，他对海岸线的本质作了深刻分析，在学术界引起震惊，这篇论文是他思想的转折，也是分形思想的形成过程并逐步得到公认，并给 F, Hausdorff 的分形思想注入了许多新内容，于是他 70 年代初创立了现代分形学^[9]。

这里首先重温一下传统的牛顿世界。以单摆的运动为例见图

1—1。无摩擦单摆运动是可逆的，因为在描述单摆运动的方程中，过去、现在和未来是完全相同的。

$$f = -mg \sin \theta \quad (1-1)$$

$$\dot{OP} = S = l\dot{\theta} \quad (1-2)$$

切向加速度和速度

$$a = d^2S/dt^2 = l d^2\theta/dt^2 \quad (1-3)$$

$$v = dS/dt = l d\theta/dt \quad (1-4)$$

$$-mg \sin \theta = m l d^2\theta/dt^2 \quad (1-5)$$

$$\text{展开 } \sin \theta \text{ 后得 } d^2\theta/dt^2 + \omega^2\theta = 0 \quad (1-6)$$

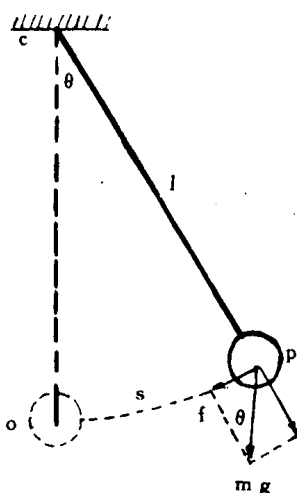


图 1—1 单摆

其中 $\omega = \sqrt{g/l}$ 。人们知道，也有许许多多不可逆过程，涉及到时间的

方向性，比如水中掺入酒精、水中倒入红墨水等，两种液体经过扩散达到均匀混合，从来不可能自动分开成水和酒精、水和红墨水，这是不可逆过程。又如热量 Q 从高温物体传到低温物体，但不可能自发地传到高温物体上去，功可以全部变为热量，但热量不可能全部转换成有用功。过去很长事件不可能自行重演，