大学课程辅导与应试系列丛书

●南北名校联合 ●四方名师打造 ●天下名品汇粹

高等数学辅导 上

（理工类）

主编：张庆灵 苏晓明

- 知识要点
- 例题精讲
- 考点研究
- 强化训练

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大学课程辅导与应试系列丛书

高等数学辅导㊤

（理工类）

主　编：张庆灵　苏晓明
副主编：石鸿雁　邵　全

天津大学出版社

内容提要

本书内容包括三部分：一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数与空间解析几何．每部分包括知识要点，例题精讲，考点研究，强化训练．例题中多数是比较典型的习题、部分高校考试题和历届研究生入学试题，对常见的题型做了总结分析．

本书可作为理工科院校高等数学的教学参考书和学习指导书，并可作为参加硕士研究生考试人员的学习参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学辅导．理工类/张庆灵主编．—天津：天津大学出版社，2003.6
ISBN 7-5618-1785-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．张…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 039313 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨风和
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内（邮编：300072）
网　　址　www.tjup.com
电　　话　营销部：022-27403647　邮购部：022-27402742
印　　刷　河北省昌黎人民胶印厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　170mm × 240mm
印　　张　11.5
字　　数　250 千
版　　次　2003 年 6 月第 1 版
印　　次　2003 年 6 月第 1 次
印　　数　1 - 5 000
定　　价　（上、下册）36.00 元

大学课程辅导与应试系列丛书
编纂指导委员会

（按姓氏笔画排列）

前　　言

《高等数学》是理工科高等学校一门重要的基础课程，也是工学、经济学硕士研究生入学考试的一门重要课程．为了满足广大读者学习和考研复习的需要，更好地帮助广大读者学好《高等数学》课程，我们根据多年的教学经验编写了本书．按照数学考试的基本要求，考生要比较系统地理解数学的基本概念和基本理论，掌握数学的基本方法．同时要求考生具有抽象思维能力、空间想像能力、运算能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力．

本书是依据全国高校工科数学课程教学指导委员会所制订的高等数学教学基本要求以及教育部制定的《2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写的．目的在于帮助大学本科学生系统复习总结归纳高等数学的重要概念、基本理论和基本方法，通过大量例题的分析、求解和总结帮助读者提高综合运用有关理论解决具体问题的方法与技巧．

本书按照教育部制订的《高等数学教学大纲》中有关高等数学的要求，将一元函数微积分、向量代数和空间解析几何分成三部分，即“一元函数微分学”，“一元函数积分学”，“向量代数和空间解析几何”三部分．每一部分开始先将相关内容进行组织归纳总结，形成知识网络；然后再举出大量各种不同类型的例题，通过分析解题思路启发读者思维，提高解题能力；接着从历届研究生入学考试题中选出部分典型考题，通过详细地分析、研究帮助读者掌握研究生入学考试所要求的知识点，以提高考试成绩；最后为读者提供了部分练习题，以便强化所学的知识，并给出了习题的参考答案或提示．

该书由张庆灵、苏晓明主编，并组织两名长期从事高等数学教学工作和硕士生入学考试辅导的同志认真讨论分工编写而成．具体分工为：石鸿雁编写第一部分“一元函数微分学”，苏晓明编写第二部分“一元函数积分学”，邵全编写第三部分“空间解析几何”，张庆灵教授主持了全书的编写工作．

本书从指导课程学习、复习考试和考研的角度，通过对大量涉及内容广、类型多、技巧性强的习题的解答和分析，揭示了高等数学的解题方法、解题规律和解题技巧．这对于提高读者分析问题的能力、理解基本概念和理论，开拓

解题思路、全面增强学生的数学素质,将会起到积极的作用.书中考点研究中的(研 2000-2-05)的含义是:2002 年数学二的一个 5 分试题.它除了作为理工科院校高等数学的教学参考书和学习指导书外,还可作为准备参加硕士研究生入学考试者的复习参考书.本书的初稿曾作为沈阳工业大学优秀教学班高等数学辅导课的讲义,得到了学生的好评.

本书在编写过程中得到了天津大学数学系齐植兰教授的悉心指导和天津大学出版社鼎力支持和帮助.编者在这里一并表示最诚挚的谢意.

由于水平有限,本书在编写过程中如有缺点和错误,恳请读者给予指正.

编者

2003 年 4 月

目　录

第一单元　一元函数微分学

一、知识要点

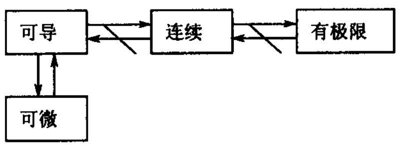
1.知识网络结构

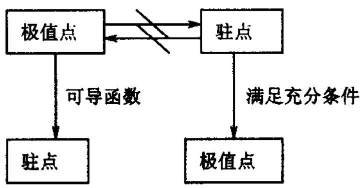
- **函数**
  - 定义(确定函数关系的要素)
  - 性质(有界性、单调性、奇偶性、周期性)
  - 反函数、复合函数(复合函数的分解)
  - 基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数)的定义、性质、图形
  - 常见重要函数(幂指函数、分段函数等)
- **极限**
  - 数列极限的定义、性质
  - 函数极限(左、右极限)的定义、性质.极限存在与左右极限的关系
  - 四则运算法则
  - 极限存在准则、两个重要极限
  - 无穷大与无穷小的定义、性质及无穷小的阶
- **连续**
  - 定义
  - 间断点及其类型(第一类、第二类间断点)
  - 闭区间上连续函数的性质(有界性,最大、最小值定理,介值定理)
- **导数**
  - 概念(定义、几何意义、物理意义、可导性与连续性的关系)
  - 求导法则
    - 基本初等函数的求导公式
    - 导数的四则运算法则
    - 复合函数的求导法则
    - 隐函数的导数
    - 参数方程确定的函数的导数
    - 反函数的导数
    - 对数求导法则
  - 高阶导数(定义、莱布尼茨公式)
- **微分**
  - 概念(定义、几何意义、导数与微分的关系)
  - 运算法则(一阶微分形式不变性)
- **中值定理**
  - 罗尔定理
  - 拉格朗日定理
  - 柯西定理
  - 泰勒定理

- **导数应用**
  - 洛必达法则
  - 单调性的判定
  - 函数的极值、最大值、最小值
  - 函数图形的凹凸性与拐点
  - 渐近线与函数作图
  - 曲率、曲率半径
  - 方程近似解的求法(二分法、切线法)

- **几个概念之间的关系**

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处





2. 主要内容

- **重要概念**

名称	定义	说明
复合函数	若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域有一部分或全部包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内,则通过中间变量 u 可以确定函数 $y=f[\varphi(x)]$,称 y 为 φ 与 f 的复合函数.	不是任意两个函数都可以复合成一个函数,复合是有条件的;若条件满足,可以由多个函数复合成一个函数. 注意:把复合函数分解成若干个简单函数,它是复合函数求导、积分的基础.
初等函数	常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所得到的用一个式子表示的函数.	工程上所讨论的函数多为初等函数. 注意:定义中的有限次四则运算和复合运算.
数列极限	若数列 $\{x_n\}$ 满足:对任给的 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,有 $\|x_n-a\|<\varepsilon$,则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限,或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$.	极限具有惟一性.收敛数列必为有界数列.

名称	定义	说明
函数极限	自变量 $x\to\infty$ 时的极限：对任给 $\varepsilon>0$，总存在正数 X，使当 $\|x\|>X$ 时，有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$，称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限．记为：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$．	自变量 $x\to+\infty$ 时的极限定义只需将定义中的 $\|x\|>X$ 变为 $x>X$ 即可，记为：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$；而自变量 $x\to-\infty$ 时的极限也只需将 $\|x\|>X$ 变为 $x<-X$，记为：$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$．
	自变量 $x\to x_0$ 时的极限：对任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$，称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限．记为：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$．	自变量 $x\to x_0$ 时的右极限需将 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 换成 $0<x-x_0<\delta$，记为：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$． 自变量 $x\to x_0$ 时的左极限需将 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 换成 $-\delta<x-x_0<0$，记为：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$． 注意：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在的充分必要条件是：左右极限存在且相等．它常常用于求分段函数在分段点的极限．
无穷小、无穷大	在自变量的某一变化过程中，以零为极限的函数称为此变化过程中的无穷小(量)； 在自变量的某一变化过程中，函数的绝对值无限增大，称此函数为此变化过程中的无穷大量．	注意：1．零是惟一一个是无穷小的常数，要把无穷小与很小很小的数区分开．同样也要把无穷大与很大很大的数区分开． 2．无穷小乘有界量为无穷小．
无穷小的阶	设 $f(x)$，$g(x)$ 都是无穷小，若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，记为： $f(x)=o(g(x))$； 若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$，则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小； 若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq0$，则称 $f(x)$ 是与 $g(x)$ 同阶的无穷小，记为：$f(x)=O(g(x))$．特别：当 $A=1$ 时，称 $f(x)$ 是与 $g(x)$ 等价的无穷小．记为： $f(x)\sim g(x)$； 若 $\lim\dfrac{f(x)}{(g(x))^k}=A\neq0,k>0$，称 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 是 k 阶无穷小．	其中高阶无穷小和等价无穷小在各类考题中经常出现，应引起重视． 无穷小的等价代换定理：若 $f(x)\sim f_1(x)$，$g(x)\sim g_1(x)$，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$，在求极限时经常用到．

名称	定义	说明
连续	设$f(x)$在x_0的某邻域内有定义,若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$或$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,其中$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,称$f(x)$在点$x_0$处连续. 若$f(x)$在$(a,b)$内每一点都连续,称$f(x)$在区间$(a,b)$内连续. 若$f(x)$在$(a,b)$内连续,在$a$点右连续同时在$b$点左连续,称$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.	连续是函数的重要性质,是高等数学的重要研究对象之一. $f(x)$在点x_0左、右连续是将连续定义中的极限分别换为左、右极限.即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$. $f(x)$在点x_0连续的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$. 此结论常用于讨论分段函数在分段点的连续性.
导数	设$f(x)$在点x_0的某邻域内有定义,若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在,称此极限为$f(x)$在点x_0的导数,记为:$f'(x_0),y'\Big\|_{x=x_0}$或$\dfrac{dy}{dx}\Big\|_{x=x_0}$.此时也称$f(x)$在点$x_0$处可导.	将定义中的极限分别换为左、右极限,则得到$f(x)$在点x_0处的左、右导数的定义,记为:$f'_-(x_0)$、$f'_+(x_0)$.即 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. 注意:$f(x)$在点$x_0$处可导的充分必要条件是$f(x)$在点$x_0$处的左、右导数存在且相等,此结论常用于讨论分段函数在分段点处的可导性.
微分	若$f(x)$在点x_0处的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$可以表示为$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$,则称$f(x)$在点$x_0$处可微,并称$A\Delta x$为$f(x)$的微分.记为: $dy=A\Delta x=Adx$.	当$f'(x_0)\neq 0$时,Δy与dy等价;$\Delta y-dy$不仅是关于Δx的高阶无穷小也是关于dy的高阶无穷小.
极值	设$f(x)$在(a,b)内有定义,x_0是(a,b)内的一点,若存在x_0的一个去心邻域使得$f(x)<f(x_0)$,称$f(x_0)$为$f(x)$的一个极大值;若存在x_0的一个去心邻域使得$f(x)>f(x_0)$,称$f(x_0)$为$f(x)$的一个极小值; 极大值和极小值统称为极值; 函数取得极值的点称为极值点.	极值是一个局部概念; 导数为零的点称为驻点; 驻点和导数不存在的连续点可能是函数的极值点; 极值点不一定是驻点,驻点也不一定是极值点.
凹凸性与拐点	设$f(x)$在区间I上连续,若对I上的任意两点x_1,x_2,恒有$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,称$f(x)$在$I$上的图形是(向上)凹的(或凹弧);若对$I$上的任意两点$x_1,x_2$,恒有$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,称$f(x)$在$I$上的图形是(向上)凸的(或凸弧); 连续曲线$y=f(x)$上凹弧和凸弧的分界点称为这条曲线的拐点.	在曲线$y=f(x)$上,二阶导数为零的点和导数不存在的连续点都可能是曲线的拐点.

- **重要定理**

定理 1 （局部保号性）若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0(A<0)$，则必存在$x_0$的一个去心邻域（不考虑$x_0$点），使得在该邻域内$f(x)>0(f(x)<0)$.

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且在点$x_0$的一个去心邻域内有$f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$，则必有$A\geqslant 0$ $(A\leqslant 0)$.

定理 2 （无穷小与极限的关系）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$的充要条件是$f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$.

定理 3 （无穷小与无穷大的关系）若当$x\to x_0(x\to\infty)$时，$f(x)$是无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小；若$f(x)$是无穷小，且$f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大.

定理 4 （海涅定理）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$存在的充分必要条件是当$n\to\infty$时，对于任何满足$x_n\to x_0(x_n\to\infty)$的数列$\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$，所对应的数列$\{f(x_n)\}$有相同的极限.

说明：此定理常用于求比较难的数列极限，此时，可根据要求的数列极限构造一个函数极限，然后利用函数求极限的方法求出极限，最后应用海涅定理得出数列极限. 这种情况在无穷级数判断敛散性时经常出现.

定理 5 （最大值、最小值定理）闭区间上的连续函数必取得最大值和最小值.

定理 6 （介值定理）闭区间上的连续函数必取得介于其最大值和最小值之间的任何值.

说明：(1)此定理为充分条件，反之不一定正确；

(2)此定理常用于证明等式；

(3)特别：（零点定理）闭区间上的连续函数，若区间端点的函数值异号，则在此区间内至少存在一点，使得其函数值为零；

(4)此定理常用于证明等式、讨论方程的根.

定理 7 （罗尔定理）若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$.

说明：此定理常用于证明等式、讨论方程的根（但与零点定理不同）、证明惟一性.

定理 8 （拉格朗日中值定理）若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$（或$a>b$）或$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$，其中$x,x+\Delta x\in[a,b]$，$0<\theta<1$.

说明：此定理不仅用于证明等式还用于证明不等式.

推论 若函数$f(x)$在区间I上的导数恒为零，则$f(x)$在此区间上是一个常数.

说明:此结论可用来证明等式.

定理 9 (柯西中值定理)若 $f(x)$,$F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且$F'(x)\neq 0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

定理 10 (泰勒中值定理)若 $f(x)$在含有 x_0 的某个区间(a,b)内具有直到 $n+1$ 阶导数,则当 $x\in(a,b)$时,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 介于x_0 与 x 之间.

当 $x_0=0$ 时为麦克劳林公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间.

说明:上述四个定理称为微分中值定理,它们建立了函数与导数之间的关系;当已知函数性质研究导数性质,或已知导数性质研究函数性质时常用到它们.它们常用来证明等式和不等式,其中建立辅助函数是常用的方法,需要积累一些建立辅助函数的方法.

定理 11 (极值存在的必要条件)若 $f(x)$在点 x_0 处可微,且 x_0 是极值点,则必有 $f'(x_0)=0$.

定理 12 (极值存在的充分条件 1)若 $f(x)$在点 x_0 的邻域内连续,在点 x_0 的去心邻域内可导,则当 $x<x_0$ 时 $f'(x)>0(f'(x)<0)$,当 $x>x_0$ 时 $f'(x)<0(f'(x)>0)$时,则 $f(x_0)$是极大(小)值.

定理 13 (极值存在的充分条件 2)若 $f(x)$在点 x_0 处具有二阶导数且$f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\neq 0$,则当 $f''(x_0)<0(f''(x_0)>0)$时,$f(x_0)$是极大(小)值.

定理 14 设 $f(x)$在点 x_0 的去心邻域上具有二阶导数,当点 x_0 的两侧 $f''(x)$异号时,则$(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的拐点.

定理 15 设 $f(x)$在点 x_0 的邻域内连续,在点 x_0 处具有三阶导数且 $f''(x_0)=0$,则$(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点的充分必要条件是 $f'''(x_0)\neq 0$.

- **重要公式**

两个重要极限

基本形式	说　明
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$	常用形式：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$， 注意：必须保证 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，这一点常被忽视. 另外，数列是函数的特例，若条件满足也可使用. 要区分开：$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$	常用形式：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=e$， 注意：必须保证 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，这一点常被忽视. 数列是函数的特例，若条件满足也可使用它求数列极限.
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\infty, & m<n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n.\end{cases}$	其中：$a_0,b_0\neq 0$，此公式在求有理函数当 $x\to\infty$ 时的极限中经常用到，要引起重视.

洛必达法则

未定式类型	内容	说明
$\dfrac{0}{0}$	设 $f(x),g(x)$ 满足： 1. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=0$； 2.在 x_0 的去心邻域内(或 $\|x\|>X>0$)，$f(x),g(x)$ 可导且 $g(x)\neq 0$； 3. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞)，其中 A 为有限数， 则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A.$	1.特别注意条件 3 的检验. 2.条件满足可多次使用；但使用一次后需进行化简，同时与其他求极限方法结合起来使用. 3.此条件是充分的，即条件满足可以使用，但条件不满足，不能认为极限不存在；此时需用其他方法求极限.
$\dfrac{\infty}{\infty}$	设 $f(x),g(x)$ 满足： 1. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\infty$； 2.在 x_0 的去心邻域内(或 $\|x\|>X>0$)，$f(x),g(x)$ 可导且 $g(x)\neq 0$； 3. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞)其中 A 为有限数， 则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A.$	注意事项同上.

其他未定式有：$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，0^{0}，∞^{0}.

原则上 $0\cdot\infty$ 可化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 两种基本形式，但具体问题应具体分析，一般地以使用洛必达法则方便、使问题简化为目标；$\infty-\infty$ 型首先通分，然后化为基本形式；另外三种形式通常采用取对数的方法，经化简后，再求极限.

常用极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n}=0, \|q\|<1$.	2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, a>0$.	3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n}}{n!}=0, a>0$.	5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$.	

常用等价无穷小量

当 $x\to0$ 时：

$\sin x\sim x$； $\tan x\sim x$； $\arcsin x\sim x$； $\arctan x\sim x$；

$e^{x}-1\sim x$； $\ln(1+x)\sim x$； $a^{x}-1\sim x\ln a$； $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$；

$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

常用的麦克劳林公式

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+o(x^{n}).$$

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m-1}).$$

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\cdots+(-1)^{m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m}).$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}+o(x^{n}).$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+o(x^{n}).$$

$$\arctan x=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1}).$$

二、例题精讲

1. 客观题

● **填空题**

例 1. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,3]$，则 $f(x+1)+f(x-1)$ 的定义域为______.

分析： 此题利用抽象函数考查函数定义域的概念.

解： 由于 $f(x)$ 的定义域为 $[0,3]$，所以 $\begin{cases}0\leqslant x+1\leqslant3,\\0\leqslant x-1\leqslant3,\end{cases}$ 因此 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant2,\\1\leqslant x\leqslant4.\end{cases}$

于是 $1\leqslant x\leqslant 2$，故 $f(x+1)+f(x-1)$ 的定义域为 $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$ 或 $[1,2]$.

例 2. 设 α,β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的解，而 $a_n=\alpha^n+\beta^n$，$n=1,2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=$ ______.

分析： 先求出 α,β，不妨设 $\alpha<\beta$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n=0$，从而可求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

解： 由已知不妨设 $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n+\beta}{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n+1}=\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

例 3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，则 $a=$ ______，$b=$ ______.

分析： 此题不能直接计算，需要通分后再作分析.

解： 由已知得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$.

由
$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\infty, & m<n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n.\end{cases}$$

若上式有极限必有 $1-a=0$，$a+b=0$，所以 $a=1$，$b=1$.

例 4. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)x(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(3x-2)^\alpha}=\beta\neq 0$，则 $\alpha=$ ____，$\beta=$ ____.

分析： 此题利用 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\infty, & m<n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n\end{cases}$

可直接得到答案，若直接将分子展开则比较麻烦.

解： $\dfrac{(x-1)x(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(3x-2)^\alpha}$ 的分子是 5 次多项式，最高项系数为 1，由上述结论知，要使 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)x(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(3x-2)^\alpha}=\beta$ 成立，必有 $\alpha=5$，此时 $\beta=\dfrac{1}{3^5}$.

例 5. $\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$ ______.

分析： 此题为 1^∞ 型未定式，变形后可用第二重要极限.

解： 方法一

$$\lim_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\left[2^x\left(1+\frac{x}{2^x}\right)\right]^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}(2^x)^{\frac{2}{x}}\left[\left(1+\frac{x}{2^x}\right)^{\frac{2^x}{x}}\right]^{\frac{x}{2^x}\cdot\frac{2}{x}}=4e^2.$$

方法二

$$\lim_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{[1+(x+2^x-1)]^{\frac{1}{x+2^x-1}}\right\}^{\frac{2(x+2^x-1)}{x}},$$

因为 $$\lim_{x\to0}\frac{2(x+2^x-1)}{x}=\lim_{x\to0}2(1+2^x\ln 2)=2(1+\ln 2)$$

或 $$\lim_{x\to0}\frac{2(x+2^x-1)}{x}=2\lim_{x\to0}\left(1+\frac{2^x-1}{x}\right)=2+2\lim_{x\to0}\frac{x\ln 2}{x}=2(1+\ln 2),$$

于是,原式 $=e^{2(1-\ln 2)}=4e^2$.

例 6. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin^3 x\cdot\sin\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{\ln(1+3x)}{x}, & x>-\dfrac{1}{3},x\neq0,\\ A, & x=0,\end{cases}$ 则 $A=$ ______ 时,$f(x)$在 $x=0$ 处连续.

分析:此题考查学生对连续概念的理解,求极限时利用无穷小乘有界量为无穷小的性质和第二重要极限.

解:由连续的定义,若 $f(x)$在 $x=0$ 处连续必有 $A=\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

而 $$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left[\sin^3 x\cdot\sin\frac{1}{x^3}+\frac{\ln(1+3x)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left(\sin^3 x\cdot\sin\frac{1}{x^3}\right)+\lim_{x\to0}\ln(1+3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=0+\ln[\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot3}]=\ln e^3=3.$$

故当 $A=3$ 时,$f(x)$在 $x=0$ 处连续.

例 7. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{e^x-1}{x}, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(x)$的连续区间是______.

分析:此题考查初等函数的连续性和分段函数在分断点处的连续性.

解:由初等函数的连续性,有如下结论:

当 $x<0$ 时,$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$连续;

当 $x>0$ 时,$f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$连续;

当 $x=0$ 时,$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$.

所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$,又 $f(0)=1$,因此 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

故 $f(x)$的连续区间是$(-\infty,+\infty)$.

例 8. 已知 $f'(x_0)=-3$,则$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-3h)}{h}=$______.