中学数学
教学丛书

微积分入门

58

卢树铭

微积分入门

卢树铭

安徽人民出版社

微 积 分 入 门

卢 树 铭

*

安徽人民出版社出版
(合肥市跃进路1号)
安徽省新华书店发行
安徽新华印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张18.5 字数407,000
1980年5月第1版 1980年5月第1次印刷
印数1—12,000
统一书号：13102·28 定价：1.43元

出 版 说 明

本书深入浅出地介绍了一元微积分知识。全书分三章：第一章微积分学研究的两类基本问题及分析问题的基本方法；第二章导数与微分；第三章积分。

为了适应中学教学和青年自学的需要，本书在内容安排上注意由浅入深，较多地联系到初等数学知识；对重点和难点，尽可能用比较浅显的事例和几何直观加以比拟，进而抽象、概括，阐明微积分的基本概念、定理和法则。书中对例题的分析和求解过程，叙述比较详尽；题目类型的选择比较多样，考虑到读者进一步学习的需要，也注意到广度和深度。

本书在编写过程中，承蒙龚贵霖教授、张智珊副教授热情指导，审读稿件，提出许多宝贵的意见。初稿完成后，又由苏家铎副教授对全稿作了校订。书中的插图是由薛凌同志绘制的。在此一并致谢。

本书可作为中学生、青年技术工人、知识青年自学微积分的入门读物，也可供中学数学教师备课参考，理工科大学（非数学专业）低年级学生也可参阅。

目　录

第一章　微积分学研究的两类基本问题及分析问题的基本方法

第二章　导数与微分

第三章　积　　分

第一章　微积分学研究的两类基本问题及分析问题的基本方法

恩格斯指出："科学的发生和发展一开始就是由生产决定的"。* 作为近代自然科学和工程技术中一种基本的数学工具——微积分，它也是首先由于生产实践的需要而产生和发展起来的。十六世纪以后，社会生产有了很大的发展，从而促进了各种科学技术的研究。例如，通商贸易中水运的发展要求了解物体在液体中的运动规律；修筑运河促进了对流体力学的研究；航海事业的发展促进了对天体运行规律的研究，等等。所有这些实际问题的研究和解决，都需要数学提供新的方法。然而以常量为主要研究对象的初等数学已不足以解决实践中存在的这类复杂的问题了。实践的需要促使人们用运动变化的观点来观察自然，研究自然，从而产生了研究变量变化规律的数学方法——微积分。正如恩格斯指出的："数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生"。*

---

*恩格斯：《自然辩证法》，《马克思恩格斯全集》第20卷 第523页。

*恩格斯：《自然辩证法》，《马克思恩格斯全集》第20卷 第602页。

微积分是应实践的需要而产生的，它被广泛应用于现代自然科学和工程技术的各个部门，成为这些领域中不可缺少的一种数学工具。本书作为学习微积分的入门，以单变量函数为主，从微积分学研究的两类基本问题——积累问题和变化率问题出发，介绍微积分学分析问题的基本方法。同时，在此基础上分别引入函数、极限、函数的连续性，导数、微分、定积分和不定分等概念，建立计算它们的方法，从而为解决微积分两类基本问题提供有效的工具。最后，再把这些方法应用于解决一些有关的问题。

一　微积分学研究的两类基本问题及分析问题的基本方法

微积分学既然是研究变量变化规律的一种数学，那么，它处理问题的基本方法与初等数学中处理问题的方法有什么区别呢？这一节我们就从微积分学的两类基本问题——积累问题(如曲边图形的面积、变速运动的路程、变力作功等)和变化率问题(如曲线的切线斜率、物体运动的瞬时速度等)出发，通过一些简单的事例，介绍微积分学分析、解决问题的基本方法。这样，我们一开始就从直观上了解微分与积分的基本概念，了解它与初等数学的区别和联系。

1.1　求面积问题举例

在生产实践中，例如测量土地或水库的大小，都需要进行面积计算。对于直边形的面积我们是会用初等数学的方法计算的；对于曲边图形的面积，除圆外，一般说来还不会计算。但是，从直观上看，任意曲线所围成的图形都应该具有

一定的面积，这在生产实际中也往往要求我们对它作出准确的计算。可是，我们用初等数学方法却不能求出曲线所围成的图形面积。

为了得出计算曲边图形面积的基本方法，我们以最简单的曲边三角形面积计算为例，进行讨论。

例 设曲边三角形 OAB 是由曲线 $f(x)=x^2$，X 轴和直线 $x=1$ 所围成的（图 1—1），求这个曲边三角形的面积 S。

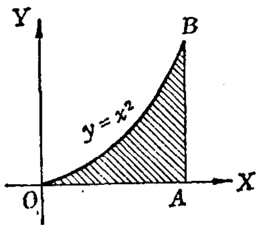


图 1—1

解 1.解决这一问题的基本思路

在初等数学中，我们已经建立了求直边图形的面积公式，如：

矩形面积＝长×宽

三角形面积$=\frac{1}{2}$(底×高)

梯形面积$=\frac{1}{2}$(上底＋下底)×高

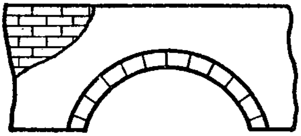
……

现在问题是怎样在初等数学的基础上寻求出求曲边三角形 OAB 的面积的方法。我们知道，如果对整个曲边三角形 OAB 直接用与它相应的直边三角形 OAB 代替(即用弦 $\overline{OB}$ 代替弧 $\overset{\frown}{OB}$)，虽然能求得其面积的一个近似值，但就整体来说"曲"与"直"相差很大，因而得到的近似值误差很大。

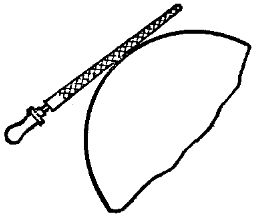
但是，任何平面图形的面积都是客观存在的，曲边三角形 OAB 的面积也是客观存在的。这就要求我们不仅能求得其精确度较高的近似值，而且要能求出它的准确值。那末，问题怎样解决呢？我们知道，如果能设法使"直边"与"曲

边”尽可能地接近，最后使“曲边”转化成“直边”，问题就容易得到解决。

关于使“曲边”转化成“直边”问题，人们在长期实践中积累了许多行之有效的正确方法。例如，建筑工人用条石可以砌成半圆形的桥洞(图1—2甲)。这是什么缘故呢？因为一块条石虽然是直的，但从桥洞的总体来看它却大致是圆的。又如，钳工用平锉可以锉出圆形的工件(图1—2乙)，这是由于平锉每锉一下虽然是直的，但只要在连续工作过程中，不断地很快地转动锉刀的方向，就能锉出一个外形看来是圆形的工件，而且锉得愈细就愈接近于圆。



甲



乙

图 1—2

上面的例子说明，尽管整体是曲的，但相对于整体来说，在局部，在很小一段范围内，可以近似地用“直”来代替“曲”。

在上述曲边三角形 OAB 中，边 OB 从整体上看是曲的，但是在局部，在很短一段上看近似于直的；而且将整体划分得愈细，则每一小段就愈接近于直的（如图1—3中，ACB 弧近似于 AC、CB 两弦的和，ACB 弧也

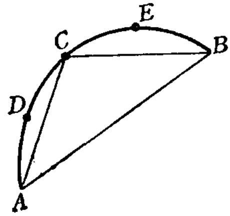


图 1—3

近似于 AB 弦，但前者的接近程度较高)。

这样，我们就得出求曲边三角形面积的基本思路：在每个局部范围内用直线段近似代替曲线段，并把局部范围尽可能地缩小。

2.具体计算

(1) 用 $n+1$ 个分点

$$0=x_0<x_1<x_2\cdots\cdots<x_{i+1}<\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=1,$$

把曲边三角形 OAB 的底边 $OA(0\leqslant x\leqslant 1)$ 分成 n 个长度相等的小线段，这些小线段的长度用 Δx(即$\Delta x=x_{i+1}-x_i$)表示，于是各分点的坐标及每一小线段的长分别为：

$$x_i=\frac{i}{n},\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,n;$$

$$\overline{x_ix_{i+1}}=\Delta x=\frac{1}{n},\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1。$$

再过各分点作平行于 Y 轴的直线，将曲边三角形分成 n 个小长块，每一小长块的面积用 ΔS_i 表示($i=0$，1，2，……，$n-1$)，如图 1—4 所示。于是

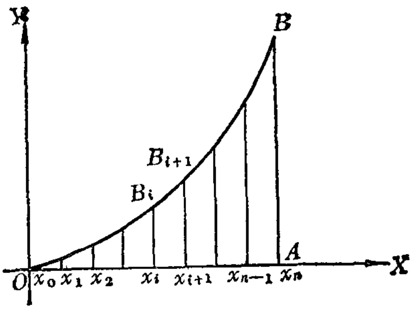


图 1—4

$$S = \Delta S_0 + \Delta S_1 + \Delta S_2 \cdots\cdots + \Delta S_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta S_i{}^*$$

（2）取第 i 个小长块 $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$ 来观察（图 1—5），它的面积仍不好求，这是由于 B_iB_{i+1} 是一段曲线段；但当 Δx 很小时，小长块的高度变化不大，曲线段 B_iB_{i+1} 就近似于矩形 $A_iA_{i+1}B'_{i+1}B_i$ 中的直线段 $B_iB'_{i+1}$。因此，我们可用矩形 $A_iA_{i+1}B'_{i+1}B_i$ 的面积近似代替 ΔS_i。

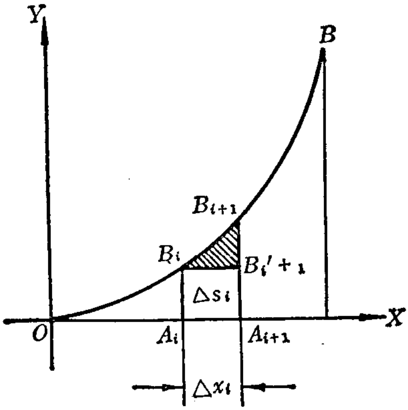


图 1—5

因为$\Delta x = \dfrac{1}{n}$，又因为曲线 OB 的方程为 $y=f(x)=x^2$，

因为取x的长度为1

因而有 $\overline{A_iB_i} = \dfrac{i}{n}$，$i=0$，1，2，……，$n-1$，

所以 $\Delta S_i \approx \overline{A_iB_i} \times \overline{x_ix_{i+1}} = x_i^2\Delta x = \left(\dfrac{i}{n}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{n}$，

$i=0$，1，2，……，$n-1$。

---

*记号 Σ 读作 sig ma 表示和的意思。

这样近似代替所产生的面积误差不会超过顶端增加的一个小曲边三角形 $B_iB'_{i+1}B_{i+1}$ 的面积(图1—5中阴形部分)。

从这里可以看出，当 Δx 愈小时，小矩形的个数就愈多，从而可以说每个小矩形的面积是曲边三角形 OAB 面积的一个微小的部分。

(3) 因为小矩形的个数是有限个，所以可以把它们的面积加起来，于是有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\
&=\left[0+\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right]\cdot\frac{1}{n}\\
&=\left[\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right]\cdot\frac{1}{n}\\
&=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+(n-1)^2}{n^3}\\
&=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)^*\\
&=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}
$$

从而得到曲边三角形 OAB 的面积 S 的近似值

$$S=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta S_i\approx\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{2}{n}\right)。$$

---

* 利用恒等式 $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$，得

$$
\begin{aligned}
&(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1\\
&n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$$
$$2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$$

把这 n 个等式两边相加，得

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots\cdots+n)+n$$

而 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，

代入上式得

$$n^3+3n^2+3n=3(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)+\frac{3}{2}n(n+1)+n,$$

整理，得 $1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$；

因此有

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}(n-1)[(n-1)+1][2(n-1)+1]$$
$$=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)。$$

(4) 由于每一个小长块用相应的小矩形近似代替以后，顶端去掉了一些小曲边三角形；如果我们把它们水平移动后不相重叠地排列在一个底为$\frac{1}{n}$，高为 1 的矩形内，可以看出这些小曲边三角形的面积和不会超过以$\frac{1}{n}$为底，1 为高的矩形面积$\frac{1}{n}$(图1—6)。因此，用$\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$近似代替曲边三角形 OAB 的面积 S，所产生的误差不会

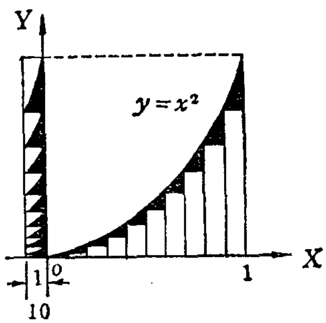


图 1—6

超过$\frac{1}{n}$。

由此可见，只要把曲边三角形的底边OA($0\leqslant x\leqslant 1$)分得愈细，即分点的个数愈多，那么所产生的误差就愈小，从而近似程度就愈高。如果分点的个数无限增多，即当n无限增大，也就是把OA无限细分，那么$\frac{1}{n}$就无限变小而趋向于零，从而面积S的近似值$\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$就转化为$S$的准确值，这个准确值就是$\frac{1}{3}$。

从上面的讨论可以看出，在"无限细分"的条件下，"曲"才可以转化为"直"，"近似"才可以转化为"精确"，正如恩格斯所说："高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾：在一定条件下直线和曲线应当是一回事"。*

1.2 求变化率问题举例

客观世界中的一切事物都处于不断运动和变化之中。在生产活动和科学实验中，人们常常需要了解各种变量的变化快慢程度，这就是有关变化率的问题。下面我们以实例来说明处理这类问题的方法。

例 在建筑工程中，常常要打桩。一个大型的蒸汽打桩机，打桩时利用高压蒸汽推动重锤沿铁塔升到一定的高度，然后排除高压蒸汽，重锤就会自由下落，有力地冲打着很长的钢筋混凝土桩。由力学原理知道，物体的动能等于$\frac{1}{2}mv^2$，

---

* 恩格斯：《反杜林论》，《马克思恩格斯全集》第20卷第133页。

m 为物体的质量，v 为速度。重锤的速度越大，产生的动能也越大，做功的本领也就越大。因此，在设计打桩机时，必须计算重锤与桩接触时的速度。然而重锤在自由下落过程中，在相等的时间里，所经过的路程(不同于等速运动)是不相等的。用实验的方法，测得在不计空气阻力的情况下，重锤下落的距离 s 与相应时间 t 之间的数据如下：

时　间 t (秒)	0	1	2	3	4	5	……
距　离 s (米)	0	4.9	19.6	44.1	78.4	122.5	……

由此表可以看出，自由落体的距离 s 与时间 t 的关系是：

$$s=4.9t^2,$$

从表中还可以看出，自由落体在相等的时间内，走过的路程并不相等，因此，重锤自由下落是变速运动。下面我们求重锤下落时，在 $t=3$ 秒时的速度。

解　1.解决问题的基本思路

我们知道，对于等速运动有计算公式：

$$速度=\frac{路程}{时间}$$

而现在的问题是：重锤下落的速度是随时间的变化而变化的。因此，要求出重锤在 $t=3$ 秒时的速度，就需要解决如何将速度“变”转化成“不变”的问题。

实践使我们认识到，一般作变速运动的物体，一方面速度是不断变化的，另一方面速度是逐渐变化的；而且在很短的一段时间内速度的变化很小，近似于等速，时间越短，越接近于等速。例如，在时间间隔 $3<t<3.01$ 内，即从 3 秒