

科学出版社

张邦固 著

恒星起源动力学



恒星起源动力学

张邦固 著

科学出版社

1994

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书用统计力学方法讨论恒星起源。考虑到气体粒子的运动速度与其位置有关,本书推荐了一个新的动力学方程。在多项式型密度分布和分层统计均匀的初始条件下,本书得到了孤立气团中心处密度随时间变化的解析表达式。从而得到气团收缩条件。本书还讨论了旋转和膨胀气团的运动情况,所得结果与有关天文观测相符。本书最后讨论了孤立收缩气团的熵。

恒星起源动力学

张邦固 著

责任编辑 杨 岭

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1994年11月第 一 版 开本:787×1092 1/32

1994年11月第一次印刷 印张:7 1/2

印数:1—1000 字数:167000

ISBN 7-03-004311-1/O·747

定价: 6.80 元

前 言

本书用统计力学方法讨论恒星的起源。与传统的统计力学不同,本书提出,孤立气团在其自身引力作用下运动时,气体粒子的速度不仅包括与其位置无关的随机部分,还应包括由引力产生的与其位置有关的部分。这样,便得到了一个新的动力学方程。在多项式型密度分布的分层统计均匀初始条件下,本书得到了气团中心处密度随时间变化的解析表达式,从而得到了气团收缩条件和恒星诞生时间。本书还讨论了旋转和膨胀气团的运动情况,得到了相应的收缩条件和恒星诞生时间。所得结果均与有关天文观测相符。

本书内容基本上是 1985 年以来作者有关工作的总结,其中大部分已在国内外有关刊物上发表,有些即将发表,少部分是首次面世。

为了使学过高等数学、普通物理、统计力学的读者能够顺利地阅读本书,前面的推导过程较细,并不时建议读者自行验算。

中国科学院高能物理研究所马中骢教授、中国科学院院士何祚庥教授和朱洪元教授都细致阅读了初稿,并提出了许多中肯的意见和有益的建议,作者深表谢意。中国高科技中心裘照明博士、吉林大学数学系孙以丰教授、河北师范大学数学系吴振德教授、北京计算数学与应用物理研究所陈式刚教授对本书的有关工作提供了重要的帮助;作者在此一并致谢。本书核心内容曾于 1993 年 5 月下旬在高能物理所四室,并于同

年 11 月上旬在理论物理所报告过,同与会专家及研究生的讨论中,作者获益匪浅,在此表示谢意。

张邦固

1994.1.6

目 录

第一章 绪论	1
§ 1.1 引言.....	1
§ 1.2 金斯的引力不稳定性理论.....	1
§ 1.3 自由落体说.....	5
§ 1.4 理论的基本任务.....	14
参考文献.....	15
第二章 玻耳兹曼方程	17
§ 2.1 由相空间中的质量守恒推导玻耳兹曼方程...	17
§ 2.2 时间级数展开和质量守恒的要求.....	24
§ 2.3 一个解析解.....	29
§ 2.4 碰撞项的影响.....	54
§ 2.5 方程的一系列解不能描述孤立气团运动.....	60
参考文献.....	78
第三章 动力学方程	79
§ 3.1 粒子的速度.....	79
§ 3.2 动力学方程.....	82
§ 3.3 平均速度与 r 有关的情况.....	84
§ 3.4 借助质量守恒判定常数.....	93
§ 3.5 $\partial v_i / \partial r$ 不含 r 的零次幂	96
§ 3.6 多组分系统.....	109

§ 3.7	函数 $f(v, r)$ 的收敛性	111
	参考文献	112
第四章	球对称	113
§ 4.1	完全球对称假设	113
§ 4.2	无碰撞玻耳兹曼方程的均匀球形解	116
§ 4.3	b_ξ 的渐近式和 $\eta(\tau)$ 的收敛域	128
§ 4.4	动力学方程(3.2.5)的球形解	138
	参考文献	152
第五章	间断点的影响	153
§ 5.1	真实物理状态与连续性	153
§ 5.2	连续初始条件	154
§ 5.3	无限连续可微初始分布	158
§ 5.4	再议玻耳兹曼方程	169
§ 5.5	本书对间断的处理	175
§ 5.6	动力学基本方程与质量守恒	176
	参考文献	180
第六章	恒星起源	181
§ 6.1	孤立旋转气团的运动	181
§ 6.2	膨胀宇宙中的孤立气团	188
§ 6.3	恒星起源	192
§ 6.4	剩余气体	197
§ 6.5	星团和星系	200
§ 6.6	孤立气团的形成	206
§ 6.7	天体形成的大致图象	209

参考文献	212
第七章 收缩气团的熵	214
§ 7.1 引言	214
§ 7.2 动力学方程和碰撞项	214
§ 7.3 仅平均速度与位置有关	215
§ 7.4 质量守恒判据	217
§ 7.5 熵	220
§ 7.6 讨论	223
参考文献	230

第一章 绪 论

§ 1.1 引 言

天体起源是一个相当古老的问题。可以说,自从有人类思维以来,便有人在思索天上的星星是怎么回事这类问题。于是,便有各种神话、传说以及各种各样的假设。18世纪,P. S. 拉普拉斯^[1](Laplace)和I. 康德^[2](Kant)各自独立地提出了星云假说,认为恒星是由一团星云通过自身引力凝聚而成的。在这之后的二百多年的时间里,科学家们又提出了许多学说^[3]。有一些科学家不同意星云说,提出诸如灾变说之类的新学说。大部分科学家仍是围绕着星云假说,或者寻找其动力学基础,或者探讨具体的收缩模式。时至今日,可以说,多数科学家均认为,天体(包括恒星、星系等)都起源于星云。我们知道^[4-7],星云的主要成分是氢原子和氢分子,还包括诸如氦等气体分子以及尘埃,其密度约为 10^{-22}g/cm^3 。如此稀薄的星云在引力相互作用下如何能凝聚起来?大家知道,引力是最弱的一种相互作用。若设强相互作用的强度为1,引力的强度只有 10^{-40} ,而电磁相互作用的强度为 $1/137$,弱相互作用的强度为 10^{-5} 。因此,星云如何演变成恒星确实是一个令人困惑的问题。

§ 1.2 金斯的引力不稳定性理论^[3]

Sir J.H. 金斯(Jeans)在1902年提出了引力不稳定性

的概念^[8], 1929年又作了较详细的论述^[9]。他认为, 如果在平衡态物质体系中出现密度扰动, 那么, 由于引力作用, 扰动可能随时间增长, 因而平衡不会恢复, 这就产生了引力不稳定性。星系、恒星等天体都是由星云中出现引力不稳定性而形成的。

在连续介质中, 如果忽略引力, 那么, 密度的小扰动将以声波形式传播。这时, 描述系统运动的基本完整方程组为

连续方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.2.1)$$

运动方程:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P \quad (1.2.2)$$

物态方程:

$$P = P(\rho) \quad (1.2.3)$$

其中, $P, \rho, \mathbf{v}$ 分别为介质(星云)体积元的压力、密度和运动速度。在平衡态时, 介质是均匀和静止的, 其密度 ρ_0 和压力 P_0 都是常数, $\mathbf{v}_0 = 0$ 。若介质中有一个小扰动, 则 $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $P = P_0 + P_1$, 并有速度 $\mathbf{v}$ 。在扰动小时, $\rho_1 \ll \rho_0$, $P_1 \ll P_0$, $\mathbf{v}$ 也是一个小量。把这些量代入(1.2.1)和(1.2.2)两式, 忽略掉二级小量, 便得到如下方程:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.2.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} P_1 \quad (1.2.5)$$

由(1.2.3)式得

$$\operatorname{grad} P_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_1 \operatorname{grad} \rho_1 = v_1^2 \operatorname{grad} \rho_1 \quad (1.2.6)$$

式中

$$v_i^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_0 \quad (1.2.7)$$

v_i 表示声速。将 (1.2.4) 式对时间求导数，再代入 (1.2.5) 和 (1.2.6) 两式，可以得到

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_1 - v_i^2 \operatorname{divgrad} \rho_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_1 - v_i^2 \nabla^2 \rho_1 = 0 \quad (1.2.8)$$

这是典型的波动方程。对于线性方程来说，其特解之和也是它的解。而最方便的特解是单色平面波。因为所有的波都可以用傅里叶 (Fourier) 级数或傅里叶积分表示为单色平面波之和，所以，最基本的问题是讨论单色平面波解。例如，设沿 z 方向传播的单色平面波的形式解为

$$\rho_1 = \rho_{10} \exp [i(\omega t - kz)] \quad (1.2.9)$$

式中 ρ_{10} 表示密度扰动振幅， ω 为波的圆频率， $k = 2\pi/\lambda$ 是波数， λ 是波长。将形式解 (1.2.9) 代入 (1.2.8) 式，得到色散方程

$$\omega^2 - k^2 v_i^2 = 0 \quad (1.2.10)$$

而波的相速度为

$$\frac{\omega}{k} = v_i \quad (1.2.11)$$

关于压力 P 和速度 $\mathbf{v}$ ，可以得到与 (1.2.9) 式一样的解 (只需更换表示振幅的物理量)。

当考虑引力时，运动方程 (1.2.2) 右端还应加上引力项

$$\mathbf{g} = \operatorname{grad} \phi \quad (1.2.12)$$

即 (1.2.2) 式变为

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{grad} \phi - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P \quad (1.2.13)$$

(1.2.12) 式中的 ϕ 为引力势，它满足泊松 (Poisson) 方程

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho \quad (1.2.14)$$

在这种情况下, (1.2.1)、(1.2.3)、(1.2.13)和(1.2.14)诸式构成完整方程组。

与声波方程(1.2.8)的推导过程类似, 针对小扰动, 只取一级小量, 便得到下列完整方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (1.2.15)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \phi_1 - \frac{1}{\rho_0} \nabla P_1 = \nabla \phi_1 - \frac{v_i^2}{\rho_0} \nabla \rho_1 \end{cases} \quad (1.2.16)$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_1 = -4\pi G \rho_1 \end{cases} \quad (1.2.17)$$

同样, 将(1.2.15)式对时间 t 求导数, 再将(1.2.16)和(1.2.17)两式代入, 便得到

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_i^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G P_0 \rho_1 = 0 \quad (1.2.18)$$

这也是波动方程。仍以形式解(1.2.9)代入, 得到色散方程

$$\omega^2 = v_i^2 k^2 - 4\pi G P_0 \quad (1.2.19)$$

波的相速度为

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{v_i^2 - 4\pi G P_0 / k^2} = \sqrt{v_i^2 - G \rho_0 \lambda^2 / \pi} \quad (1.2.20)$$

显然, 此波与声波不同, 其相速度与波长有关, 引力效应(根号中的第二项)使相速度减小, 波长越长, 相速度越小。由(1.2.19)式可见, 当引力项超过声速项时, $\omega^2 < 0$ 。将(1.2.9)式写为

$$\rho_1 = (\rho_{10} e^{-ikz}) e^{i\omega t} \quad (1.2.21)$$

当 $\omega^2 < 0$ 时, 记 $\omega = \pm i\theta$, $\theta = \sqrt{|\omega^2|} > 0$, 则有

$$\rho_1 = (\rho_{10} e^{-ikz}) e^{\pm \theta t} \quad (1.2.22)$$

由此可见, 扰动(指数取正号时)密度 ρ_1 将随时间呈指数式

增长。出现引力不稳定。由 $\omega^2 < 0$ 和(1.2.19)式可得

$$k^2 < 4\pi G\rho_0/v_t^2 \quad (1.2.23)$$

即当

$$\lambda > \lambda_J \equiv \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} v_t \quad (1.2.24)$$

时,出现引力不稳定。(1.2.24)式称为“金斯判据”。而 λ_J 称为“金斯波长”。

我们看到,金斯的引力不稳定性理论只是说明了,当扰动的波长大于金斯波长时,扰动幅可能会呈指数增长(或衰减),从而使星云团不稳定。但是,怎样不稳定?是消散为无数小片?还是分裂为少数的几小团?还是收缩凝聚在一起?金斯理论并不能回答这些问题。因为,它只是讨论了可能出现扰动的情况,并没有从正面去研究星云团的密度在星云团自身引力作用下如何变化这一实质性问题。

§ 1.3 自由落体说

有些作者(如林忠四郎^[7])认为,星云团在自身的引力作用下,其中的氢分子等会像自由落体一样降到中心,从而形成恒星。

让我们用一个简单的模型来进行计算,看一看通过自由落体能否使星云团中心密度增高到足以点燃热核反应的程度。

为了方便,先做一些约定。粒子一词表示氢分子、氢原子、氦分子、尘埃等。具体含义视具体情况而定。 r 表示粒子的位置。 v 表示粒子的速度。今后,如不特别说明,就维持上述含义。

设有一个球状纯粒子团。所谓纯,是说,它仅包含一种质量为 m 的粒子。初始时刻,它的粒子数密度是均匀的

$$\eta(\mathbf{r}, t = 0) = n_0 \quad (1.3.1)$$

粒子团的初始半径为 R 。

在 η 为球对称的条件下,粒子团内某粒子所受到的引力只与以粒子团中心为球心、以中心到该粒子的距离 r 为半径的球内的质量有关,与球外的粒子无关。我们先来证明这一点。

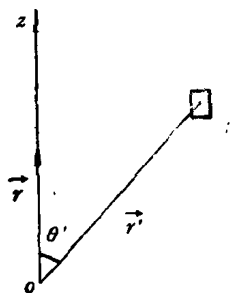


图 1.1

由于密度具有球对称性,因此,选用球坐标,将极轴的方向选在由原点指向所讨论的受力粒子的方向。于是 r' 处立体元内的粒子在 r 处的引力势为(参看图 1.1)

$$d\phi = -G \frac{m^2 n_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi' \quad (1.3.2)$$

其中 G 是引力常数。于是,粒子团内 r_1 到 r_2 的一个球壳中粒子在 r 处的势为

$$\begin{aligned} \phi &= -G m^2 n_0 \int_{r_1}^{r_2} r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\varphi' [(r - r' \cos \theta')^2 + r'^2 \sin^2 \theta']^{-\frac{1}{2}} \\ &= -2\pi G m^2 n_0 \int_{r_1}^{r_2} r'^2 dr' I \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

其中, I 为下述积分:

$$I = \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' [(r - r' \cos \theta')^2 + r'^2 \sin^2 \theta']^{-\frac{1}{2}} \quad (1.3.4)$$

做变量变换,令 $x = \cos \theta'$, 上式变为

$$I = \int_{-1}^1 dx (r'^2 + r^2 - 2rr'x)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.3.5)$$

再做变量变换

$$x = \frac{r^2 + r'^2}{2rr'} \sin^2 \delta, \quad dx = d\delta \frac{r^2 + r'^2}{2rr'} \sin 2\delta \quad (1.3.6)$$

积分(1.3.5)变为

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-1}^{x=1} d\delta \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{2rr'} 2 \sin \delta \\ &= \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{rr'} (-\cos \delta) \Big|_{x=-1}^{x=1} \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

由(1.3.6)式可得

$$\cos \delta = \left(1 - \frac{2rr'}{r'^2 + r^2} x \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.8)$$

当 $x = -1$ 时, $\cos \delta = \frac{r' + r}{\sqrt{r'^2 + r^2}}$; 当 $x = 1$ 时, $\cos \delta = \frac{|r - r'|}{\sqrt{r'^2 + r^2}}$, 于是积分(1.3.7)变为

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{rr'} \left[\frac{r' + r}{\sqrt{r'^2 + r^2}} - \frac{|r' - r|}{\sqrt{r'^2 + r^2}} \right] \\ &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| \\ &= \begin{cases} \frac{2}{r}, & r > r' \\ \frac{2}{r'}, & r' > r \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

代回(1.3.3)式, 对于内径大于 r 的球壳, 有

$$\phi = -4\pi G m^2 n_0 \int_{r_1}^{r_2} r' dr' = -2\pi G m^2 n_0 (r_2^2 - r_1^2) \quad (1.3.10)$$

于是, 位于 r 处的粒子受到内径大于 r 的球壳内粒子的合力为

$$\mathbf{F} = \text{grad}\phi = 0 \quad (1.3.11)$$

再由(1.3.9)和(1.3.3)两式, 对于 $r_3 < r$ 的球, 其内部的粒子在 r 处的势为

$$\begin{aligned} \phi(r_3) &= -4\pi G m^2 n_0 \int_0^{r_3} \frac{r'^2}{r} dr' \\ &= -\frac{4}{3} \pi r_3^3 n_0 m m G \frac{1}{r} = -G \frac{mM(r_3)}{r} \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

其中

$$M(r_3) = \frac{4}{3} \pi r_3^3 n_0 m \quad (1.3.13)$$

是半径为 r_3 的球内所有粒子的质量和。由(1.3.12)式容易求得, 半径 r_3 的球对 r 处粒子的合力为

$$\mathbf{F} = -GmM(r_3) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.3.14)$$

以上证明是针对均匀分布情况进行的。不过, 容易将其推广到密度非均匀但仍保持球对称的系统。也就是说, 对于球对称的分布

$$\eta(\mathbf{r}) = \eta(r) \quad (1.3.15)$$

(1.3.11) 和 (1.3.14) 两式依然成立。读者不妨试试自己证明之。

由于(1.3.14)式中的 r_3 可以取不大于 r 的任何值, 因此, 可以令 $r_3 = r$, 便得到粒子团中位于 r 处的粒子所受到的合力

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM(r)}{r^3} \mathbf{r} \quad (1.3.16)$$

有了上述准备之后, 就可以开始自由落体说的试算了。

由(1.3.16)式和牛顿运动定律可知, r 处粒子的加速度大小, 即 r 的二阶导数, 为

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \quad (1.3.17)$$

其中已经应用了如下事实: 粒子的惯性质量与其引力质量相等。(1.3.17)式还包含了假设: v 始终沿着径向。

注意, (1.3.17)式的左边可以写成

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr} v \quad (1.3.18)$$

代回(1.3.17)式, 适当整理, 便有

$$v dv = -\frac{GM}{r^2} dr \quad (1.3.19)$$

设 M 为与 r 无关的常数。积分(1.3.19)式, 便得到

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r} + C \quad (1.3.20)$$

再假设, 初始时刻 ($t = 0$) 有

$$r = r_0, v = 0 \quad (1.3.21)$$

代回(1.3.20)式, 可以定出积分常数

$$C = -\frac{GM}{r_0} \quad (1.3.22)$$

代入(1.3.20)式, 注意 v 是速度的大小, 只取正值, 便有

$$v = \sqrt{2GM} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}} \quad (1.3.23)$$

因为自由落体时 v 与 r 反向, 所以 $v = -dr/dt$, 将上式整理后得到

$$dt = -dr \left[2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (1.3.24)$$

初始时位于 r_0 的粒子, 在其它粒子引力作用下自由落体到