胡适耕　刘金山　编著

实变函数与泛函分析
定理·方法·问题

高等教育出版社

实变函数与泛函分析

定理·方法·问题

胡适耕　刘金山　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目（CIP）数据

实变函数与泛函分析：定理·方法·问题/胡适耕，刘金山编著．—北京：高等教育出版社，2003.5

ISBN 7－04－011959－5

Ⅰ.实…　Ⅱ.①胡…②刘…　Ⅲ.①实变函数－高等学校－教学参考资料②泛函分析－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 026027 号

责任编辑：徐　可　　**封面设计**：王凌波

版式设计：杨　明　　**责任印制**：宋克学

实变函数与泛函分析 定理·方法·问题

胡适耕　刘金山　编著

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http：//www.hep.edu.cn
传　　真	010－64014048		http：//www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	北京地质印刷厂

开　　本	880×1230　1/32	**版　　次**	2003 年 5 月第 1 版
印　　张	8.375	**印　　次**	2003 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	240 000	**定　　价**	15.00 元

前　言

对于现今数学系的大学生来说，实变函数与泛函分析似乎是这样的课程：你要么特别喜爱它，要么十分惧怕它，甚至厌弃它.如果你在经过一番努力之后，终于尝到了这一门(两门?)课程的滋味，为其中异常丰富且引人入胜的数学思想所打动，那么你将不可能不喜爱它，很可能将它视为大学期间最美妙的课程之一.如果你在绞尽脑汁之后依然不得要领，只是感到囫囵吞下的一大堆定义与定理抽象费解，而面对问题则束手无策，那么，你心中自然只留下恐惧与厌倦，很可能视其为大学期间最伤脑筋的课程.对于实变函数与泛函分析课程的教师来说，如果能使喜爱这门课程的人更多一点，而惧怕它的人更少一点，那么就算成功了.这似乎并不容易.本书作者与许多同行交换过看法，发现情况并不乐观.

就其令人赞赏的逻辑力量与高度富有启发性的数学思想而言，实变函数与泛函分析无疑是最有价值的大学数学课程之一，它对于数学系大学生的基础理论训练所起的独特作用是无可替代的.在这一点上，数学教育界并无歧见.问题在于，你如何使刚开始学习这一课程的大学生达到同样的认识？实际情况常常是，远在学生开始意识到实变函数与泛函分析有其重要性之前，他们的学习兴趣已被这门课程晦涩艰深的外观驱除殆尽了.

这就需要给学生以帮助.首要的问题是，你得竭尽全力降低课程难度，至少为一部分学生解除惧怕心理.要做到这一点，教师的高明指点与教材的有效引导，无疑是最重要的，但往往还不够.经验表明，无论是喜爱或惧怕实变函数与泛函分析的学生，都花不少时间到教材以外的书籍中去搜索，以期获得一些帮助，甚至是在苦恼之中得到一点安慰.然而，在这方面真正可读的书籍似乎并不多，几乎难得一见.

本书作者之一所撰的《实变函数》与《泛函分析》两书，已分别于

1999 年与 2001 年面世(高等教育出版社－施普林格出版社),并陆续被国内许多高等学校用作教材.自然,这些教材的读者中,既会有实变函数与泛函分析的喜爱者,也会有惧怕者.他们传递给作者的一个共同信息是,对于理解内容与解决问题(这两本教材所列问题数量都颇可观),倘无更进一步的引导,确有难以克服的困难.这一情势,也是促使我们撰写本书的因素之一.

本书熔思想、方法与问题于一炉,从不同于教材的另一个角度为初学者提供引导,其重点则在于通过具体问题阐释典型方法,务使一些通常被学生认为难于掌握的方法呈现出自然与简洁的面貌.在某些方面,教材必因其自身的特点而不免言不尽意;而一本不必受通行风格约束的书,则不妨在必要之处“喋喋不休”,直到使某些要义被阐发得淋漓尽至而后已.本书所汇集的整整 600 个问题,无论从教与学两方面考虑,都提供了一个思考与演练的较大的空间.

我们要特别感谢高等教育出版社对于撰写本书的支持,正是出版社及时转达了读者的建议而促成本书的写作.对于为我们提供了一些问题与建议的同行,在此亦致诚挚的谢意.

作者

2003 年 4 月于武汉

记号与约定

A^c :集 A 的补.

A° :集 A 的内部.

$\bar{A}$:集 A 的闭包.

$A^\perp$:集 A 的正交补或零化子.

AC:绝对连续函数类.

$B_r(a)$:以 a 为心以 r 为半径的开球.

$\bar{B}_r(a)$:以 a 为心以 r 为半径的闭球.

BV:有界变差函数类.

$\mathscr{B}^n$: n 维 Borel 集族;通常令 $\mathscr{B} = \mathscr{B}^1$.

C:复数域.

$C(A,B)$:从 A 到 B 的连续映射之全体.

$C(A) = C(A,\mathbf{R})$ 或 $C(A,\mathbf{C})$.

$C^r(A)$:A 上的 r 次连续可微函数之全体.

$\mathrm{CL}(X,Y)$:从 X 到 Y 的紧线性算子之全体.

$\mathrm{CL}(X) = \mathrm{CL}(X,X)$.

χ_A :集 A 的特征函数.

$D(F)$:映射 F 的定义域.

$d(A,B)$:集 A 与 B 之间的距离; $d(x,B) = d(\{x\},B)$.

$\dim X$:空间 X 的维数.

$\{e_i\}$:通常记 $\mathbf{R}^n$ 或 $l^p(1 \leqslant p < \infty)$ 的标准基.

$\mathrm{GL}(X)$:空间 X 上的拓扑自同构之全体.

$\mathrm{Gr}F$:映射 F 的图形.

H :通常记 Hilbert 空间.

I :单位算子,单位矩阵.

J: 通常记某个闭区间 $[a,b]$.

$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$.

$L^p(\Omega)$:Ω 上的 p 次可积函数之全体, $1 \leqslant p < \infty$.

$L^{\infty}(\Omega)$:Ω 上的本性有界函数之全体.

$L(X,Y)$:从 X 到 Y 的有界线性算子之全体.

$L(X) = L(X,X)$.

$\mathscr{L}^n$:n 维 Lebesgue 可测集之全体;$\mathscr{L} = \mathscr{L}^1$.

$l^p = L^p(\mathbf{N})(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

$M(\Omega)$:Ω 上的可测函数之全体.

$M^+(\Omega)$:Ω 上的非负可测函数之全体.

m :Lebesgue 测度.

$\mathbf{N}$:自然数集.

$N(T)$:算子 T 的零空间.

$\mathbf{Q}$:有理数集.

$\mathbf{R}$: 实数域;$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm \infty\}$.

$\mathbf{R}_+ = [0,\infty)$;$\overline{\mathbf{R}}_+ = \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$.

$R(T)$:算子 T 的值域.

$R(\lambda,T) = (\lambda I - T)^{-1}$.

$r_\sigma(T)$:算子 T 的谱半径.

$\rho(T)$:算子 T 的正则值集.

$S(\Omega)$:Ω 上的简单函数之全体.

$S^+(\Omega)$:Ω 上的非负简单函数之全体.

span A :集 A 生成的向量空间.

$\sigma(\mathscr{A})$:集族 $\mathscr{A}$ 生成的 σ - 代数.

$\sigma(T)$:算子 T 的谱.

T :通常记线性算子.

T^* :算子 T 的对偶算子或相伴算子.

$\mathrm{V}_a^b(f)$:函数 f 在 $[a,b]$ 上的全变差.

X,Y,Z :通常记赋范空间.

X^*:空间 X 的对偶.

$\mathbf{Z}$:整数集;$\mathbf{Z}_+ = \{n \in \mathbf{Z} : n \geqslant 0\}$.

2^X: 集 X 的子集之全体.

$\triangleq$:定义为.

$\square$:一题解毕.

几点说明

1. 引证　§1.1(1)表§1.1节中式(1);1.1表第一章题1;[1,p.1]表参考文献[1]中第1页.余类推.

2. 指标用法　不致误解时,出现于$\sum$,$\prod$,$\bigcup$,$\bigcap$下的指标予以省略.未注明时,下标n总表自然数.$\sum a_n$依情况可写成:

$$\sum_n a_n,\ \sum_1^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 或 } \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n.$$

$\prod a_n$,$\bigcup A_n$等仿此.$\bigcup A_n$总可看作无限可数并(必要时增加一些空集项);$\bigcap A_n$仿此.

3. 极限符号　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$简写作$\lim\limits_n x_n$;$\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn}$简写作$\lim\limits_{m,n} x_{mn}$;$f(x^{\pm})=\lim\limits_{h\downarrow 0} f(x\pm h)$,其中$h\downarrow 0$表示$0<h\to 0$.未说明时,极限值包括$\pm\infty$;$\infty$总是指$+\infty$.$\rightrightarrows$记一致收敛;$\xrightarrow{\text{a.e.}}$或$\to$,a.e.记几乎处处收敛;$\xrightarrow{\text{a.u.}}$或$\to$,a.u.记几乎一致收敛;$\xrightarrow{\mu}$记依测度$\mu$收敛;$\xrightarrow{L^p}$记$L^p$收敛;$\rightharpoonup$记弱收敛,$\overset{*}{\rightharpoonup}$记弱*收敛;$f_n\uparrow f$表$f_n\to f$且$f_n$对$n$单调增.对于序列极限,通常省去"$n\to\infty$".

4. 集记号　$\{x\in X: x$满足$P\}$表示X中满足条件P的元之全体,通常简写作$X(P)$或$\{P\}$.例如$\{x\in X: f(x)\geqslant 0\}$简写作$X(f\geqslant 0)$或$\{f\geqslant 0\}$.集$\{f\geqslant 0\}$的定义与$f$是否为非负函数无关.即使处处有$f(x)<0$,$\{f\geqslant 0\}$仍然是一个合理的集,它就是$\{f\geqslant 0\}=\varnothing$!若$A,B$是某向量空间的子集,则约定$A+B=\{a+b: a\in A, b\in B\}$,$-A=\{-a: a\in A\}$.

5. 范数记号　不致混淆时,空间$X,Y,X^*,L(X,Y)$等中的范数用同一记号$\|\cdot\|$.$\|\cdot\|_p$记L^p范数;$\|\cdot\|_0$记sup范数;$|\cdot|$记$\mathbf{K}^n$中的Euclid范数.

6. 最大与最小　约定 $a \vee b = \max\{a,b\}$, $a \wedge b = \min\{a,b\}$; $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f)^+$（分别称为 f 的正部与负部）.

7. const 的用法　当 const 出现在式子中时，它表示某个有限常数；其具体数值难以或不必明确写出.

8. 问题　题号依章编排. 所有问题都表述得尽可能简略. 证明题仅写出要证的结论，而省去"求证"之类的词. 一部分问题给出了详细解答，其余的题则仅给出提示或答案.

郑重声明

目　　录

第一章　集论与测度

现在,你已开始实变函数课程的学习.无论你选择了哪本教材,大概首先得面对集论与测度.在学习的这一阶段,你未必十分清楚,集论与测度在现代数学中占有何等位置.实际上,二者是全部数学的公认的基础,而不像流行教材似乎要人们相信的,它们不过是实变函数的一个首章而已.不妨这样来看:正因为如此辉煌的数学理论被纳入实变函数课程内容的范围之内,实变函数所提供的数学训练才如此重要且无可替代.不过,在一个短短的课程中,你还来不及接触集论与测度论的深入内容.而且,对于函数的研究,集论与测度都不过是工具而已.对于实变函数论的学习,重要的是,你应能像在微积分学中运用实数理论一样,熟练地运用集论与测度的基本概念、用语、结论与方法.本章正是要帮助你做到这一点.

§1.1　集　论

一、定理与定义

你大概在中学时代就开始接触集论概念了.因此不妨假定,关于集及其运算的概念、记号与规则,已是众所周知的公共知识.

对于一个集列 $\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ (简写作 $\{A_n\}$),约定

$$\begin{cases} \overline{\lim_n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \\ \underline{\lim_n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \end{cases} \tag{1}$$

二者分别称为 $\{A_n\}$ 的上极限与下极限.由(1)直接看出,$x \in \overline{\lim_n} A_n \Leftrightarrow$ 有任意大的 n 使 A_n 含有 x,$x \in \underline{\lim_n} A_n \Leftrightarrow$ 当 n 充分大时必 $x \in A_n$.这

一直观理解对上、下极限集的运用是重要的. 若 $\overline{\lim_n} A_n = \underline{\lim_n} A_n = A$, 则称 A 为 $\{A_n\}$ 的极限, 并记作 $\lim_n A_n$. 若 $\{A_n\}$ 是升列(即 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$), 则 $\lim_n A_n = A = \bigcup_n A_n$, 缩写作 $A_n \uparrow A$; 若 $\{A_n\}$ 是降列(即 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$), 则 $\lim_n A_n = A = \bigcap_n A_n$, 缩写作 $A_n \downarrow A$.

若 $A \subset X$, 则以 A^c 记 A 在 X 中的补集, 即 $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$. 注意 A 与 A^c **互为补集**, 这种互补性是许多对偶关系的基础. 基本的**对偶律**是:

$$\begin{cases} (\bigcup A_i)^c = \bigcap A_i^c, \\ (\bigcap A_i)^c = \bigcup A_i^c. \end{cases} \tag{2}$$

公式(2)常用来实现并与交的互相转化. 结合(1), (2)得出

$$\begin{cases} (\overline{\lim_n} A_n)^c = \underline{\lim_n} A_n^c, \\ (\underline{\lim_n} A_n)^c = \overline{\lim_n} A_n^c. \end{cases} \tag{3}$$

公式(3)可用来实现上极限与下极限的互相转化.

利用补与交(或补与并), 可表出其他集运算. 例如

$$A \setminus B = A \cap B^c \qquad (差); \tag{4}$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \qquad (对称差). \tag{5}$$

任给 $A \subset X$, A 的特征函数 χ_A 定义为

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in A^c. \end{cases} \tag{6}$$

A 与 χ_A 唯一地互相决定. 特征函数用来实现集关系与数量关系的互相转化. 基本的对应规则是:

$$A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B, A \subset B \Leftrightarrow \chi_A \leqslant \chi_B;$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B, \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B;$$

$$\chi_{A \Delta B} = |\chi_A - \chi_B|.$$

任给集合 $X_1, \cdots, X_n$, 称

$$\prod_{i=1}^n X_i = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in X_i (1 \leqslant i \leqslant n)\} \tag{7}$$

为 $X_1,\cdots,X_n$ 的积集,也记作 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$. 当 $X_1=\cdots=X_n=X$ 时,将 $\coprod_{i=1}^{n}X_i$ 写作 X^n, 称其为 X 的 n 重积. $\mathbf{R}^n,\mathbf{Q}^n,\mathbf{Z}^n$ 是最常见的 n 重积集的例子,其中 $\mathbf{R},\mathbf{Q},\mathbf{Z}$ 分别为实数集,有理数集与整数集.

给定非空集 X,Y. 若对每个 $x\in X$, 依规则 F 有唯一确定的元 $y=Fx\in Y$ 与之对应,则称 F 为从 X 到 Y 的映射,记作 $F:X\to Y$. 这里本质的东西是 x 与 Fx 之间的确定对应关系;至于这一对应关系的表示方法及相应的名称与记号,都是非本质的.你可以改称映射为函数、变换、算子等等.为便于理解,最好将映射看作微积分学中所熟知的函数概念的自然推广.关于函数的熟知术语自然地移用于一般的映射 $F:X\to Y$. 例如,称 Fx 为 F 在 x 的函数值;称 X 为 F 的定义域,记作 $D(F)$; 称 $R(F)\triangleq\{Fx:x\in X\}$ 为 F 的值域;称 $\mathrm{Gr}F\triangleq\{(x,Fx):x\in X\}$ 为 F 的图形.若 $R(F)=Y$,则称 F 为满射;若当 $x\neq z$ 时 $Fx\neq Fz$, 则称 F 为单射;若 F 既是单射又是满射,则称 F 为一一映射.若 $F:X\to Y$ 是一一映射,则每个 y 对应唯一的 $x\in X$, 使得 $Fx=y$, 此时称对应

$$F^{-1}:Y\to X,Fx\to x$$

为 F 的逆映射或反函数.

给定映射 $F:X\to Y$ 与 $G:Y\to Z$, 可构成复合映射

$$G\circ F:X\to Z,x\to G(Fx).$$

F 是一一映射的充要条件是:存在 $G:Y\to X$, 使得

$$G\circ F=1_X,\quad F\circ G=1_Y, \tag{8}$$

其中 $1_X:X\to X,x\to x$ 是单位映射, 1_Y 仿此;式(8)中的 G 必为 F 的逆映射.

给定映射 $F:X\to Y,A\subset X,B\subset Y$, 令

$$FA=\{Fx:x\in A\},\quad F^{-1}B=\{x:Fx\in B\}.$$

称 FA 为 A 在 F 下的像[①],称 $F^{-1}B$ 为 B 关于 F 的原像.对于 $A,A_i\subset X,B,B_i\subset Y(i\in I),C\subset Z,G:Y\to Z$, 有以下常用的关系:

① 在胡适耕编的《实变函数》、《泛函分析》中用的是“象”,本书改用“像”.

$$A \subset F^{-1}FA, \qquad FF^{-1}B \subset B; \tag{9}$$

$$F(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i FA_i, \quad F(\bigcap_i A_i) \subset \bigcap_i FA_i; \tag{10}$$

$$\begin{cases} F^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i F^{-1}B_i, F^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i F^{-1}B_i; \\ F^{-1}B^c = (F^{-1}B)^c; \end{cases} \tag{11}$$

$$(G \circ F)^{-1}C = F^{-1}(G^{-1}C). \tag{12}$$

通常实变函数教材中多少包含某些关于基数的内容,对于如何处理这些内容,学者们看法不尽一致.基数理论美妙而深奥,对于数学家有持久的吸引力.在这一点上,人们并无争议.但在一个带入门性质的实变函数与泛函分析课程中,并无必要涉及基数概念,仅有关于可数集的概念就够了.

若 A 是一个集,存在单射 $F: A \to \mathbf{N}$,则称 A 为可数集.更直观的描述是:若 A 的全体元素可排列成一个有限或无限序列:$A = \{x_1, x_2, \cdots\}$,则称 A 为可数集.在这一定义下,可数集包括了所有有限集.对于一无限可数集,除了少数例外,要将其全体元素实际写成一个序列是很困难的.因此,通常依据其他一些条件来间接地判定可数性,下面两个定理即为此而设.

定理 1.1.1 设 $F: A \to B$ 是一映射.若 F 是单射,B 可数,则 A 可数;若 F 是满射,A 可数,则 B 可数.

定理 1.1.2 可数集的子集是可数集;可数个可数集的并是可数集;有限个可数集的积集是可数集.若 $\{I_n\}$ 是一列可数集,则形如

$$\{x_{i_1\cdots i_n}: i_k \in I_k, k = 1,\cdots,n; n = 1,2,\cdots\}$$

的集是可数集.

最常用的可数集是:有理数集 $\mathbf{Q}$,n 维有理点集 $\mathbf{Q}^n$,有理系数多项式之集,等等.记住这些基本的可数集,然后再借助于定理 1.1.1 与定理 1.1.2,解决本课程中可能遇到的可数集判定问题,已无任何困难.

习惯上,Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的子集称为点集."点集"这一称呼并无实质意义.本质的东西是:可以用距离来刻画 $\mathbf{R}^n$ 中两点间的接近程度.这一事实可以在更一般的空间(例如 Banach 空间与度量空间)中确立.

因此,我们将在第三章中更系统地考虑点集问题,现在只提出最初步的定义与某些简单结论.

任给 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$, 称

$$|x|=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

为 x 的模长或 Euclid 范数. 任给 $x,y\in\mathbf{R}^n$, 称 $|x-y|$ 为 x 与 y 之间的距离. 任给 $a\in\mathbf{R}^n$, $r>0$, 称

$$B_r(a)=\{x\in\mathbf{R}^n:|x-a|<r\}$$

为以 a 为心以 r 为半径的球或开球. 若 $A\subset\mathbf{R}^n$, 则分别以 A°, $\bar{A}$ 与 A' 记 A 的内部、闭包与导集,其中

$$A^\circ=\{x\in A:\exists\, r>0,\text{使 } B_r(x)\subset A\};$$

$$\bar{A}=\{x\in\mathbf{R}^n:\forall\, r>0,\text{有 } A\cap B_r(x)\neq\varnothing\};$$

$$A'=\{x\in\mathbf{R}^n:\forall\, r>0,\text{有}(A\setminus\{x\})\cap B_r(x)\neq\varnothing\}.$$

若 $A=A^\circ$, 则称 A 为开集;若 $A=\bar{A}$, 则称 A 为闭集;若 $B\subset\bar{A}$, 则说 A 在 B 中稠密;若 $(\bar{A})^\circ=\varnothing$, 则称 A 为疏集. 若存在 $r>0$, 使得 $A\cap B_r(x)=\{x\}$, 则称 x 为 A 的孤立点. 无孤立点的闭集称为完备集. 可数个开集的交称为 G_δ 型集,可数个闭集的并称为 F_σ 型集.

定理 1.1.3　一集为开集当且仅当其补为闭集;任意个开集的并及有限个开集的交是开集;任意个闭集的交及有限个闭集的并是闭集;空集与全空间既是开集又是闭集.

定理 1.1.4　$\mathbf{R}$ 中任何非空开集是可数个互不相交的开区间之并(这样的开区间称为构成区间); $\mathbf{R}^n$ 中任何非空开集可表为可数个(未必互不相交)开球之并.

若 $F\subset\mathbf{R}$ 是闭集且 $F\neq\mathbf{R}$, 则 F^c 是非空开集. 于是由定理 1.1.4 推出, F 是从 $\mathbf{R}$ 上挖去可数个互不相交的开区间后所得之集,被挖去的区间称为 F 的余区间;当余区间相互没有公共端点时 F 是完备集. 完备集可以是疏集,其典型例子就是著名的 Cantor 集.

任给非空集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 与函数 $f:\Omega\to\mathbf{R}$. 设 $a\in\Omega$, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, $\forall\, x\in\Omega\cap B_\delta(a)$, 有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, 则说 f 在点 a 连续. 若