GAOZHISHENGBENKE

备考系列

全国成人高考专升本、高职升本科备考系列

高等数学

真题解析

滕桂兰 朱文举 郭洪芝 朗东 编

考前冲刺

模拟演练

真题解析

紧扣大纲

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

全国成人高考专升本、高职升本科备考系列

高等数学真题解析

滕桂兰　朱文举　郭洪芝　郎　东　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学真题解析/滕胜兰编.—天津:天津大学出版社,2004.3
(全国成人高考专升本、高职升本科备考系列)
ISBN 7-5618-1871-8

Ⅰ.高… Ⅱ.滕… Ⅲ.①高等学校-成人教育:高等教育-解题-升学参考资料②高等数学-高等学校:技术学校-解题-升学参考资料 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第003715号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
网　　址 www.tjup.com
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷 河北省昌黎县人民胶印厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 170mm×240mm
印　　张 12.25
字　　数 268千
版　　次 2004年3月第1版
印　　次 2004年3月第1次
印　　数 1-5 000
定　　价 18.00元

前　言

我们根据教育部考试中心制定的《全国各类成人高等教育招生复习考试大纲》,并以各地“高职升本科”招生统一考试《高等数学》考试大纲为参考,汇集了自1997年至2003年全国成人高等学校专升本统一考试高等数学(一)试题,并以各地高职升本科试题作为参考练习题,编写了这本辅导书.

本书对1997年至2003年专升本的考试题目进行了归纳、分类,对其中每一个题目都做了详细分析和阐述,并给出了正确答案.在此基础上,我们又以各地“高职升本科”的试题为准,编写了足够量的练习题,对这部分练习题也都做了详细解答,在本书的最后附有两套模拟试题和2003年成人高等学校专升本全国统一考试高等数学(一)试卷以及它们的答案.

为了提高考生的数学水平及应试能力,在编写过程中,我们力求做到条理清楚,文字简练,分析由浅入深,以便作为考生考前的自学辅导用书.

本书可作为普通专科、高职专科、成人及高等教育自学考试专升本使用,也可作为工程技术人员学习工作时的参考书.值得注意的是部分地区高职升本科对一部分内容不做要求.如天津市高职升本科高等数学中对级数部分及二阶常微分方程不做要求,希考生注意.

限于我们的水平,书中难免有疏漏和不妥之处,敬请广大读者提出宝贵意见,我们将不胜感谢.

编者

2004.1

目　录

真题与真题分析

一、选择题……………………………………………………………………（1）
二、填空题……………………………………………………………………（12）
三、计算题……………………………………………………………………（25）
四、综合题……………………………………………………………………（51）

练　习　题

一、选择题……………………………………………………………………（68）
二、填空题……………………………………………………………………（75）
三、计算题……………………………………………………………………（82）
四、综合题……………………………………………………………………（88）
练习题参考答案 ……………………………………………………………（89）

模拟试题与真题试卷

模拟试题(一)…………………………………………………………………（160）
模拟试题(二)…………………………………………………………………（162）
模拟试题(一)参考答案 ………………………………………………………（164）
模拟试题(二)参考答案 ………………………………………………………（167）
2003年成人高等学校专升本招生全国统一考试
高等数学(一)试卷……………………………………………………………（172）
2003年成人高等学校专升本招生全国统一考试
高等数学(一)试题答案和评分参考 …………………………………………（175）

附　　录

附录1:全国各类成人高等学校招生复习考试高等数学(一)考试大纲
（专科起点升本科） …………………………………………………………（179）
附录2:高职升本科《高等数学》考试大纲(天津市） ………………………（188）

真题与真题分析

一、选择题

在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内，每小题 4 分.

1.(**1997***)函数 $y=\frac{1}{x}\ln(2+x)$的定义域为(　　).

A. $x\neq 0$，且 $x\neq -2$　　　　B. $x>0$

C. $x>-2$　　　　D. $x>-2$，且 $x\neq 0$

解　选 D.

要使函数 $y=\frac{1}{x}\ln(2+x)$有意义，必须 $2+x>0$，且 $x\neq 0$，因此该函数的定义域为 $x>-2$，且 $x\neq 0$.

注　(1)使函数 $y=f(x)$有意义的自变量 x 的全体称为 $y=f(x)$的定义域，通常有下面四种情况：

1°　对数函数的定义域是其真数大于零；

2°　分式函数的定义域是其分母不为零；

3°　若 $f(x)=\sqrt[n]{\varphi(x)}$，且 $n=2m$，m 为正整数，则求其定义域时，要求 $\varphi(x)\geqslant 0$；

4°　对于 $\arcsin x$，$\arccos x$，其定义域为$[-1,1]$.

(2)如果函数是由上述其中几类函数进行四则运算而得到的函数，则其定义域是各个函数定义域的公共部分.

2.(**2001**)当 $x\to 0$ 时，下列函数为无穷小的是(　　).

A. $\frac{\sin x}{x}$　　B. $x^2+\sin x$　　C. $\frac{1}{x}\ln(1+x)$　　D. $2x-1$

解　选 B.

因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(x^2+\sin x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2+\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1,$$

$$\lim_{x\to 0}(2x-1)=\lim_{x\to 0}2x-\lim_{x\to 0}1=0-1=-1,$$

由无穷小的定义知，当 $x\to 0$ 时，$x^2+\sin x$ 是无穷小，即应选 B.

注　(1)当 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$ 时，称 $f(x)$是当 $x\to x_0(x\to\infty)$时的无穷小量，由此来判

*　表示此题系该年全国成人高等学校专升本高等数学试题

定变量 $f(x)$ 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时是否为无穷小量.

(2)在极限计算中经常要使用两个重要极限,要弄清两个重要极限的特征:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\left(\text{或}\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1\right),\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\left(\text{或}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right.$$

$=\mathrm{e})$.即只要 $f(x)\to 0$,就有 $\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}\to 1$,$[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}\to\mathrm{e}$.

如 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(3x-3)}{3x-3}=1$,$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}=\mathrm{e}$ 等.

3.(**2002**)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}$ 等于(　　).

A.0　　　B.$\dfrac{1}{2}$　　　C.1　　　D.2

解　选A.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,即当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小,且 $|\sin 2x|\leqslant 1$,即 $\sin 2x$ 为有界函数.利用无穷小的性质,无穷小与有界函数的乘积是无穷小知,当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{\sin 2x}{x}$ 是无穷小,即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=0$.

注　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 两个极限之间的区别.

4.(**2000**)当 $x\to 0$ 时,$x^2-\sin x$ 是 x 的(　　).

A.高阶无穷小

B.等价无穷小

C.同阶无穷小,但不是等价无穷小

D.低价无穷小

解　选C.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\dfrac{\sin x}{x}\right)=0-1=-1$,故当 $x\to 0$ 时,$x^2-\sin x$ 是 x 的同阶无穷小,但不是等价无穷小,即应选C.

注　设当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷小.

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,则当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小;

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$,则当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小;

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$($k$ 为不等于零的常数),则当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 是

同阶无穷小;

特别当 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则称 $x\to x_0(x\to\infty)$时,$f(x)$与 $g(x)$是等价无穷小.

5.(**1999**)设 $f(x)=\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$,当 $x\neq 0$,$F(x)=f(x)$,若 $F(x)$在点 $x=0$ 处连续,则 $F(0)$等于(　　).

A. -1　　　B. 0　　　C. 1　　　D. 2

解　选 C.

由函数在点 x_0 处连续定义知,要使 $F(x)$在点 $x=0$ 处连续,必须

$$F(0)=\lim_{x\to 0}F(x).$$

因为 $$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=1,$$

故 $F(0)=1$,即应选 C.

注　函数 $f(x)$在点 x_0 处连续,必须满足:

1° $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$都存在;

2° $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$,即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在;

3° $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

否则 $f(x)$在点 x_0 处间断.

6.(**2001**)点 $x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ e^x-1, & x\geq 0\end{cases}$ 的(　　).

A.连续点　　　　B.可去间断点

C.第二类间断点　　　　D.第一类间断点,但不是可去间断点

解　选 A.

因为 $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}x=0$, $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(e^x-1)=1-1=0$,故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,又 $f(0)=e^0-1=0$,即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,由函数在一点连续的定义知,点 $x=0$ 是 $f(x)$的连续点.

7.(**1997**)设 $f(x)$在点 x_0 处不连续,则(　　).

A. $f'(x_0)$必存在　　　　B. $f'(x_0)$不存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$必存在　　　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$必不存在

解　选 B.

若 $f(x)$在点 x_0 处不连续,则 $f'(x_0)$必不存在.用反证法,假设 $f'(x_0)$存在,由函数可导与连续的关系(如果 $f(x)$在点 x_0 处可导,则 $f(x)$在点 x_0 处连续)知,$f(x)$在点 x_0 处必连续,与条件矛盾,故 $f'(x_0)$不存在,即应选 B,从而 A 不正确.

又 $f(x)$在点 x_0 处不连续,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$可能存在也可能不存在.例如,$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在 x

$=0$ 处不连续，但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 存在；又如，$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处不连续，而 $\lim\limits_{x\to0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to0-0}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to0+0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$ 不存在，因此 C、D 不正确.

8.(**2002**)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内平行于 x 轴的切线(　　).

A.仅有一条　　B.至少有一条　　C.不一定存在　　D.不存在

解　选 B.

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$，满足罗尔定理的条件，故在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$，即至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使曲线 $f(x)$ 在该点 $(\xi,f(\xi))$ 处的切线平行 x 轴，因此曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内平行于 x 轴的切线至少有一条，故应选 B.

9.(**1999**)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则(　　).

A.至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$

B.当 $\xi\in(a,b)$ 时，必有 $f'(\xi)=0$

C.至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

D.当 $\xi\in(a,b)$ 时，必有 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

解　选 C.

因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，满足拉格朗日中值定理的条件，故在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，故应选 C.

注　要熟知罗尔定理和拉格朗日中值定理的内容.

罗尔定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

10.(**1997**)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)>0$，则(　　).

A.$f(0)<0$　　　　B.$f(1)>0$

C.$f(1)>f(0)$　　　　D.$f(1)<f(0)$

解　选 C.

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，满足拉格朗日中值定理条件，故必存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi)$，又在 $(0,1)$ 内 $f'(x)>0$，因此 $f(1)-f(0)=f'(\xi)>0$，即 $f(1)>f(0)$.

另解　因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内 $f'(x)>0$，由函数单调的充分条件知，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加，故 $f(1)>f(0)$.

11.(**2001**)设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，$f'(x)>0$，并且 $f(0)<0$，$f(1)>0$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内(　　).

A.至少有两个零点　　B.有且仅有一个零点

C.没有零点　　D.零点个数不能确定

解　选 B.

由条件 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，且 $f'(x)>0$，知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调增加，从而曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴最多有一个交点，即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内最多有一个零点；又 $f(0)<0$，$f(1)>0$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由闭区间上连续函数的介值定理知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内至少有一个零点.因此 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内有且仅有一个零点，故选 B.

12.(**1998**)设 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$，则 $x=1$ 为 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的(　　).

A.极小值点，但不是最小值点

B.极小值点，也是最小值点

C.极大值点，但不是最大值点

D.极大值点，也是最大值点

解　选 B.

因 $f'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=1$，$x=-1$.又 $f''(x)=2x$，$f''(1)=2>0$，故由极值的充分条件知 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，极小值 $f(1)=\frac{1}{3}\times1^3-1=-\frac{2}{3}$.

又因为 $f(1)=-\frac{2}{3}$，$f(-2)=\frac{1}{3}(-2)^3-(-2)=-\frac{8}{3}+2=-\frac{2}{3}$，

$$f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)=\frac{2}{3},\quad f(2)=\frac{1}{3}\times2^3-2=\frac{2}{3}.$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处也取得最小值，因此 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点也是最小值点.

注　通常连续函数在 $[a,b]$ 上的极小(大)值不一定是函数的最小(大)值.

闭区间上连续函数的最大(小)值一定存在，且在其极值点与区间的端点中取得.

13.(**1997**)曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$(　　).

A.仅有水平渐近线　　B.既有水平渐近线又有垂直渐近线

C.仅有垂直渐近线　　D.既无水平渐近线又无垂直渐近线

解　选 A.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}\Big/\frac{1}{x}=1$，故 $y=1$ 是曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 的水平渐近线.又 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$($\lim\limits_{x\to0}x=0$，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant1$)，故曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 无垂直渐近线.

注　若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则 $y=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线；若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线，以此求曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线和垂直渐近

线.

14.(**2002**)设$f(x)$为连续函数,则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x$ 等于(　　).

A.$f(x)+C$　　B.$f'(x)+C$　　C.$f(x)$　　D.$f'(x)$

解　选C.

设$F'(x)=f(x)$,则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$,故应选C.

注　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$(或$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$),

同样地,$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$;

而　$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$;$\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$.

15.(**2000**)设$f(x)$为$[a,b]$上的连续函数,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ 的值(　　).

A.小于零　　B.等于零　　C.大于零　　D.不能确定

解　选B.

因为定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是积分和式的极限,它是一个确定的数值.这个数值仅与被积函数$f(x)$和积分区间$[a,b]$有关,而与积分变量用什么字母表示无关,即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$ 等.故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=0,\text{故选 B.}$$

16.(**1998**)设$f(x)$为可导函数,则$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'$为(　　).

A.$f(x)$　　B.$f(x)+C$　　C.$f'(x)$　　D.$f'(x)+C$

解　选A.

因为$f(x)$可导,故$f(x)$的原函数存在,设$F'(x)=f(x)$.于是$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$,故应选A.

17.(**1999**)设$f(x)$为$[-a,a]$上的连续函数,则定积分$\int_{-a}^a f(-x)\mathrm{d}x$ 等于(　　).

A.0　　B.$2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$　　C.$-\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$　　D.$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$

解　选D.

因$f(x)$在$[-a,a]$上连续,故$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

令$x=-t$,则$\int_{-a}^a f(-x)\mathrm{d}x=-\int_a^{-a} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$,显然C不正

确.又当$f(-x)=f(x)$,即$f(x)$为偶函数时,才有$\int_{-a}^{a}f(-x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$;当$f(-x)=-f(x)$,即$f(x)$为奇函数时,才有$\int_{-a}^{a}f(-x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$.而对于一般的$[-a,a]$上的连续函数,A、B不正确,因此选D.

18.(**1997**)设$\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=a^{2x}$,则$f(x)$等于(　　).

A.$2a^{2x}$　　B.$a^{2x}\ln a$　　C.$2xa^{2x-1}$　　D.$2a^{2x}\ln a$

解　选D.

因为$\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=a^{2x}$,两边对$x$求导数,得

$$f(x)=a^{2x}\cdot 2\ln a=2a^{2x}\ln a.$$

注　在这里用到积分上限函数的性质,即若$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$\varphi(x)=\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上可导,且$\varphi'(x)=\left(\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$,要熟练掌握.

19.(**1997**)设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则曲线$y=f(x)$与直线$x=a,x=b,y=0$所围成的平面图形的面积等于(　　).

A.$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$　　B.$\left|\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|$

C.$\int_{a}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$　　D.$f'(\xi)(b-a)\quad(a<\xi<b)$

解　选C.

由定积分的几何意义知:当$f(x)\geqslant 0$时,$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$的值等于由$y=f(x),x=a,x=b(a<b)$及$y=0$所围平面图形的面积;当$f(x)\leqslant 0$时,所求平面图形的面积等于$-\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}[-f(x)]\mathrm{d}x$.因此所围平面图形的面积等于$\int_{a}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$,即选C.

20.(**2001**)下列广义积分中收敛的是(　　).

A.$\int_{1}^{+\infty}x\mathrm{d}x$　　B.$\int_{1}^{+\infty}x^2\mathrm{d}x$　　C.$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$　　D.$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

解　选D.

因为$\int_{1}^{+\infty}x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{b}=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{2}(b^2-1)=+\infty$;

$$\int_{1}^{+\infty}x^2\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}x^2\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}(b^3-1)=+\infty;$$

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_{1}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\ln b=+\infty;$$

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{1}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1,$$

由广义积分收敛发散的定义知$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛,即应选D.

21.(1998)设有单位向量 $\boldsymbol{a}^{\circ}$,它同时与 $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$ 垂直,则 $\boldsymbol{a}^{\circ}$为( ).

A.$\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$　　B.$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

C.$\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$　　D.$\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

解　选 A.

因为 $\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=1,$

$$|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3},$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}\right|=1,\ |\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|=\sqrt{3},$$

故 B、D 不正确.又因为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}\right)\cdot(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})=\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}}=0,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}\right)\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})=\frac{1}{\sqrt{3}}\times1+\frac{1}{\sqrt{3}}\times0-\frac{1}{\sqrt{3}}\times1=0,$$

因此 $\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$.而

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}\right)\cdot(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})=\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}\neq0,$$

即$\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不垂直,不满足条件,即 C 不正确,故选 A.

22.(2000)设 $\boldsymbol{a}=\{-1,1,2\},\boldsymbol{b}=\{2,0,1\}$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为( ).

A.0　　B.$\frac{\pi}{6}$　　C.$\frac{\pi}{4}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

解　选 D.

因为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角$(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})$的余弦为

$$\cos(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},$$

且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\{-1,1,2\}\cdot\{2,0,1\}=(-1)\times2+1\times0+2\times1=-2+0+2=0$,故 $\cos(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=0$,而 $0\leqslant(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})\leqslant\pi$,因此$(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{2}$.

注　通常利用 $\cos(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$来求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角,但本题因 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,也可利用二非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 来求得.即因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1\times2+1\times0+2\times1=0$,且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,故由二非零向量垂直的充要条件知,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为$\frac{\pi}{2}$.

23.(**1999**)设有直线$\frac{x}{0}=\frac{y}{4}=\frac{z}{-3}$,则该直线必定(　　).

A.过原点且垂直于 x 轴　　B.过原点且平行于 x 轴

C.不过原点,但垂直于 x 轴　　D.不过原点,但平行于 x 轴

解　选 A.

显然点(0,0,0)在直线$\frac{x}{0}=\frac{y}{4}=\frac{z}{-3}$上,即直线过原点.

又因为所给直线的方向向量为$\{0,4,-3\}$,x 轴的方向向量为$\{1,0,0\}$,且

$$\{0,4,-3\}\cdot\{1,0,0\}=0\times1+4\times0+(-3)\times0=0,$$

故所给直线垂直 x 轴,因此所给直线过原点且垂直于 x 轴,即选 A.

24.(**1997**)平面 $x+2y-z+3=0$ 与空间直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$的位置关系是(　　).

A.互相垂直　　B.互相平行但直线不在平面上

C.既不平行也不垂直　　D.直线在平面上

解　选 D.

因为平面 $x+2y-z+3=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,2,-1\}$,直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$的方向向量 $\boldsymbol{s}=\{3,-1,1\}$,且 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=1\times3+2\times(-1)+(-1)\times1=0$,故 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$,直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$平行于平面 $x+2y-z+3=0$.

又直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$上的点 $M(1,-1,2)$代入平面方程有 $1+2\times(-1)-2+3=0$,即点 M 在该平面上.

因此直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$在平面 $x+2y-z+3=0$,故选 D.

25.(**2001**)方程 $x^2+y^2-z^2=0$ 表示的二次曲面是(　　).

A.球面　　B.旋转抛物面　　C.圆锥面　　D.圆柱面

解　选 C.

通常球心在 $O(0,0,0)$,半径为 R 的球面方程为$x^2+y^2+z^2=R^2$;

以 z 轴为旋转轴的旋转抛物面方程为 $2pz=x^2+y^2$;

母线平行 z 轴的圆柱面方程为$x^2+y^2=R^2$;

圆锥面的二次曲面方程为 $x^2+y^2-z^2=0$,故选 C.

26.(**2002**)方程 $z=x^2+y^2$ 表示的二次曲面是(　　).

A.椭球面　　B.柱面　　C.圆锥面　　D.抛物面

解　选 D.

方程 $z=x^2+y^2$ 表示的二次曲面由上面讨论知是旋转抛物面,故选 D.

27.(**1997**)设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2,a>0,y\geqslant 0\}$,在极坐标系中,二重积分 $\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可表示为(　　).

A. $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r$　B. $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r$　C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r$　D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r$

解　选 A.

因为用极坐标表示 $D:0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant a$.

又因为 $x^2+y^2=(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2$.

故　$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r$,即选 A.

28.(**1999**)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$,则(　　).

A. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在

C. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 可能存在　　D. $\{S_n\}$为单调数列

解　选 B.

由条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,且 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$,根据无穷级数收敛的定义知,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在,故选 B.而 C 显然不正确;$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在不一定为 0,即 A 也不正确;当 $u_n\geqslant 0(\leqslant 0)$时,$\{S_n\}$才为单调数列,现 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意级数,$\{S_n\}$不一定是单调数列,即 D 不正确.

29.(**2001**)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是正项级数,且 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$,则下列命题正确的是(　　).

A.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛　　B.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散

C.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散　　D.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

解　选 B.

由正项级数比较判别法知选 B.

A 不正确,如$\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{1}{n}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,从而 C 也不正确;D 也不正确,如$\frac{1}{n^3}\leqslant\frac{1}{n^2}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$也收敛.

注　正项级数的比较判别法仅适用于正项级数.若 $u_n\leqslant v_n$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散(通俗记法:大敛小也敛,小散大也散).

30.(**2000**)级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$(　　).

A.绝对收敛　　　　　　B.条件收敛

C.收敛性不能确定　　　　D.发散

解　选A.

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$,这是$p=\dfrac{5}{4}$的$p$-级数$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)$,故它收敛,从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$绝对收敛.

注　p-级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$当$p>1$时收敛,$p\leqslant 1$时发散.这可作为结论使用.

判定此类级数的敛散性时,通常先判定它是否绝对收敛,即先判定$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$是否收敛,若收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛;若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散且用比值法判定的,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散且用比较法判定得到的,则还需看$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是否为交错级数,若是交错级数则用莱布尼茨准则判定,符合其条件为条件收敛,不符合条件或不是交错级数则再改用其他方法(如性质,级数收敛定义等)判定.

31.(**2002**)设常数$k\neq 0$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k}{n^2}$为(　　).

A.条件收敛　　B.绝对收敛　　C.发散　　D.收敛性与k有关

解　选B.

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{k}{n^2}\right|=|k|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,由级数的性质知,$|k|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k}{n^2}$绝对收敛,即应选B.

32.(**1997**)下列级数中为条件收敛的级数是(　　).

A.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$　　　　B.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$

C.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$　　　　D.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

解　选D.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\neq 0$,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$发散,A不成立;

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n}=\infty\neq 0$,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$发散,B不成立;

因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{n^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$绝对收敛,C不成立;

因$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散,且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$为交错级数,满足$\frac{1}{\sqrt{1}}<\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{3}}<\cdots$,$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$,由莱布尼茨准则知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛,且为条件收敛,故应选 D.

33.(**1998**)若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=-2$处收敛,则该级数在$x=1$处(　　).

A.发散　　　　B.敛散性无法判定

C.条件收敛　　　　D.绝对收敛

解　选 D.

由条件,幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=-2$处收敛,知其收敛半径$R\geqslant|-2|=2$,得$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-2,2)$内绝对收敛,又$x=1\in(-2,2)$,故幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=1$处绝对收敛.

34.(**1997**)微分方程$y''=y'$的通解是(　　).

A.$y=C_1x+C_2e^x$　　　　B.$y=C_1+C_2e^x$

C.$y=C_1x+C_2x$　　　　D.$y=C_1x+C_2x^2$

(其中C_1,C_2为任意常数)

解　选 B.

所给方程为二阶常系数线性齐次微分方程.其特征方程为$r^2-r=0$.特征根为$r_1=0,r_2=1$.

故方程$y''=y'$的通解为$y=C_1+C_2e^x$.

35.(**1998**)对于微分方程$y''+3y'+2y=e^{-x}$,利用待定系数法求其特解y^*时,下列特解设法正确的是(　　).

A.$y^*=Ae^{-x}$　　　　B.$y^*=(Ax+B)e^{-x}$

C.$y^*=Axe^{-x}$　　　　D.$y^*=A^2xe^{-x}$

解　选 C.

所给方程为二阶线性常系数非齐次微分方程.

因为所给方程对应的齐次方程为$y''+3y'+2y=0$,其特征方程为$r^2+3r+2=0$,特征方程的根为$r_1=-1,r_2=-2((r+1)(r+2)=0)$.

显然$r=-1$是特征方程的单根,故在求解非齐次方程$y''+3y'+2y=e^{-x}$时,应将特解y^*设为$y^*=Axe^{-x}$,即应选 C.

二、填空题

把答案填在题中横线上,每空 4 分.

1.(**2000**)设$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, & x>0,\end{cases}$则$f(0)=$______.

解　1.