廣義函數論導引

I. 海爾比林

科學出版社

廣義函數論導引

I. 海爾比林著
王 光 寅譯

科 學 出 版 社
1957年5月

內 容 提 要

廣義函數論的建立是近代數學中重要成就之一，它已經成爲數學分析中的一個有力的工具。本書簡明地介紹了其基本概念和理論，它是數學工作者和物理學工作者所歡迎的讀物。

廣義函數論導引

原著者 I. 海爾比林
翻譯者 王光寅
出版者 科學出版社
北京朝陽門大街117號
北京市書刊出版業營業許可證出字第061號
印刷者 上海中科藝文聯合印刷廠
總經售 新華書店

1957年5月第一版 書號：0763 印張：1 13/16
1957年5月第一次印刷 開本：850×1168 1/32
(滬)0001—7,370 字數：40,000

定價：(11) 0.42 元

俄譯本校訂者序

在上世紀的三十年代, Н.И. 洛巴契夫斯基(Лобачевский)和P. 狄黎希萊 (Dirichlet) 給出了函數的古典定義, 如大家所知, 這定義是說: 函數 $y = y(x)$ 是一個規則, 按照這個規則, 對於 x 的變化域中的每個數值唯一地確定了 y 的某個數值. 這個定義是由於十八世紀和十九世紀初葉物理和數學上的重大發現的結果而形成起來的, 從積累起來的材料中很自然地導出這個定義, 並且這定義成功地解決了當時遇到的主要困難, 以致各方面的數學家完全一致地接受了這個定義. 在十九世紀和二十世紀初, 數學分析的整個進一步的發展, 實質上是循着包含在這個定義中的可能展開的方向前進的。 似乎不言而喻, 數學分析的問題從此就化爲各種函數類(連續函數, 可微函數, 解析函數等等)的研究. 分析本身就得到了第二個名稱: 函數論. 在這方面分析獲得了極大的成就, 我們祇要指出解析函數論和偏微分方程一般理論的發展, 就足以說明這一點。

雖然如此, 但是自二十世紀初, 函數的古典定義不再是那樣完美了, 並且希望有所改善。 在這裏我們不涉及實變函數論法國學派方面對這個定義的批判. 更重要的是要指出物理學家方面的或明或暗的批判。 首先, 物理學家們不滿意許多限制條件, 而數學家們却以這些限制作爲准許對函數施行各種運算的先決條件 (例如: 級數的逐項微分, 積分次序的調換等等). 其次(也是主要的), 從物理的要求的觀點上來看, 在所有情況下, 函數的數學定義應該充分靈活, 使得在合理的抽象程度上給出物質世界的過程的相應描述。 但是就像瞬息衝量這類極簡單的物理現象便不在古典函數所描述的範疇之內. 爲了描述這些現象起見, 物理學家們引進了

“δ-函數”，“此‘函數’除去一點以外到處爲零，但在這一點爲無窮，而其積分等於1”，從函數的古典定義的觀點上來看，這是驚人的矛盾．但是物理學家們却成功地應用了 δ-函數的“微商”！因此數學家和物理學家之間就產生了互相不瞭解的危險。數學家們有責任來創造一種工具，這工具要能描述更多的物理現象並且使古典的分析工具能够施行得更方便．

在這方面，最先的工作是 H.M. Гюнтер 在數學物理方程上的工作[1-5]．H.M. Гюнтер 所不知道的並不是點函數，而是區域函數，而區域函數更符合問題的物理實質：譬如物體在一點的溫度是假想的虛構，而這物體在區域中的平均溫度却有確切的物理意義．相應地就建立了古典邊界問題的適當定義．特別，如果把 δ-函數（而不是其微商）看作區域函數，它就得到合理的意義．

С.Л. Соболев[6] 更推進了一步，他引進“廣義函數”的概念．所謂廣義函數就是定義在某個函數集合上綫性汎函，這集合是由一切 m 次可微而在某區域外部爲零的函數 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 所構成的．每個普通的點函數 $f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 以及可加的區域函數 $\psi(G)$ 皆產生這樣的汎函：在普通點函數 $f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 的情形，這汎函是按公式 $(f,\varphi) = \int f\varphi\, dx$ 而界定；而在區域函數 $\psi(G)$ 的情形，這汎函乃是按公式 $(\psi,\varphi) = \int \varphi d\,\psi(G)$ 而界定．特別，如果把 δ-函數看作汎函 $(\delta,\varphi) = \varphi(0)$，它就得到一個體現．在廣義函數類中，定義了微分運算和極限步驟，因此在 С.Л. Соболев 的觀念中，δ-函數（至某階）的微商便得到了體現．在上述論文[6]中，С.Л. Соболев 把他的觀念用來解決變係數雙曲型方程的柯西問題．在以後的論文[7]中，他把廣義函數用於數學物理的其他問題上．

自 1946 年，法國數學家 Laurent Schwartz 開始了分佈論[9]方面的系統的工作。Schwartz 的“分佈”也就是一種綫性汎函，

祇不過是定義在無窮可微函數上而已，而這就保證了分佈的無限微分的可能性. Schwartz 仔細地研究了他的分佈理論;特別,他闡明了分佈的性質（證明了每一個分佈都是某個連續函數的第若干階微商，這連續函數一般並不具有普通意義下的微商），另外，他還引進了分佈的卷積運算和富里哀變換，並且指出了許多種偏微分方程的簡單解法，這些解法的基礎是把所尋求的函數看作是分佈. 在分佈論於數學物理和分析上的應用方面，Schwartz 並沒有得到眞正新的結果，所以某些大數學家（S. Bochner[10]）對 Schwartz 的理論表示懷疑的態度，也是很自然的. 雖然如此，Schwartz 的這些工作不失爲廣義函數論發展中的重要的里程碑.

在這本書中敍述了 Schwartz 理論的基礎. 它是加拿大數學家 Israel Halperin 根據 Schwartz於 1949 年在加拿大 Vancouver 的演講而寫成的. Halperin 把材料敍述得很簡單明瞭，末尾固然稍許簡略,但畢竟是很容易瞭解的. 可惜,像富里哀變換這樣重要的部分他都沒有講到,也沒有提到任何應用，就連 Schwartz 的應用都沒有引進來. 如果讀者對這些問題有興趣的話，可以讀 L. Schwartz 著的 Théorie des distributions，第二卷，Paris，1951.

Г. Е. 施洛夫（Шилов）

目　　錄

俄譯本校訂者序……………………………………………………(i)
§ 1. 引言 ……………………………………………………………(1)
§ 2. 點函數是汎函 ……………………………………………………(2)
§ 3. 廣義函數的運算 …………………………………………………(8)
§ 4. 廣義函數的乘積 …………………………………………………(10)
§ 5. 廣義函數的階 ……………………………………………………(12)
§ 6. 廣義函數的連續性和收斂性 ……………………………………(16)
§ 7. 致零集和支集 ……………………………………………………(23)
§ 8. 廣義函數的微分方程 ……………………………………………(27)
§ 9. 多變量的廣義函數；定義和例 …………………………………(31)
§ 10. 多變量的廣義函數；理論 ………………………………………(38)
§ 11. 卷積 ……………………………………………………………(42)
§ 12. 廣義函數的富里哀級數 …………………………………………(44)
俄譯本校訂者補充……………………………………………………(45)
參考文獻………………………………………………………………(49)

§1. 引　　言

自從前世紀末運算微積廣泛流行以來，就採用了許多表達式，而從數學觀點來看，這些表達式的意義是不够明確的．譬如，我們來考慮海維賽 (Heaviside) 函數 $Y(x)$，當 x 的數值不超過零時，此函數爲零；而當 x 的數值是正的時候，這函數等於 1．人們說這個函數的微商就是狄拉克(Dirac)[1]的 δ-函數，簡單地用符號 $\delta(x)$ 來表示．這個函數具有下列諸性質：除去原點以外，這函數到處爲零；而在原點的數值如此大，使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

這些性質在數學上是不相容的，但是這"函數"以及其逐次"微商"却有許多重要應用．

狄拉克自己也曾指出：運用普通的(數學上容許的)函數和極限步驟也可以不引進 δ-函數．但如果把 δ-函數考慮爲一個測度，也就是說，不把它看作普通點函數，而看作集合函數，那麽就可以保留 δ-函數而且能給以嚴格的定義． 這就提示我們要擴大點函數的概念來包括許多新的對象，並且相應地推廣微商的概念，使得在新的體系中每個點函數皆有一個嚴格定義了的微商[2]． 這在廣義函數論中已經做到了． 在新的對象的體系中，包括所有連續函數、所有勒貝格局部可求和函數以及許多新的對象，譬如上述的狄拉克測度函數就是這些新對象中的一個簡單的例子．所有這些對

1) 遠在狄拉克以前就已經引進了 δ-函數的概念，狄拉克祇是廣泛地應用這個函數．關於這個函數及其歷史可參考 Balth. Van Der Pol 和 H. Bremmer 合著的 Operational Calculus based on the two-sided Laplace integral 的第五章——俄譯本譯者註．

2) 就像 Dedekind 擴大了有理數的概念，而使數的概念包括所有實數．

象稱爲廣義函數．有一個更一般的（但是嚴格的）求微商的步驟給每個廣義函數確定一個微商，這微商仍然是一個廣義函數，因此每個廣義函數，包括每個局部可求和的點函數在內，皆有所有階的微商．一個局部可求和的點函數的微商雖一般不是一個點函數，但恆爲一廣義函數．然而，如果普通的微商存在且局部可求和時，則廣義的微商和普通的微商乃一致．

廣義函數論給上述運算微積的諸公式以嚴格意義．不僅對於單變數的函數可以建立起廣義函數的理論，而對於多變數函數也可以建立起廣義函數理論．此外，像富里哀級數和富里哀積分，卷積以及偏微分方程等論題，廣義函數論也提供了一個簡單而更完備的理論．

在 Laurent Schwartz 著的 Théorie des Distributions 中給出了廣義函數論的系統的說明．這一本小册子可以作爲廣義函數論中某些基本概念的一個介紹．

§2. 點函數是汎函

下面的討論將引導到廣義函數的明確的定義，在本節末尾我們給出這個定義．

命$[a,b]$是一個有窮的閉區間．一個連續函數固然可以看作是一個點函數[1]；但也可以從另外的觀點來考慮[2]，也就是用它來確定一個汎函(F,φ)如下：

$$(F,\varphi)=\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

1) 點函數祇要幾乎到處有定義，並且如果兩個函數幾乎到處相等，那麼就算是同一個函數．因此如果函數 $f(x)$ 的數值幾乎到處爲零，我們便說 $f(x)$ 等於零；如果 $f(x)$ 可以和一個連續函數等同，我們便說 $f(x)$ 是連續函數；所謂函數 $f(x)$ 的上界是指眞正上界而言，也就是等於$f(x)$的所有函數的上界的下界；如果有一個等同於$f(x)$的可微函數存在，則此函數的微商便叫做 $f(x)$ 的微商，等等．

2) 正如 Dedekind 曾用一個新的觀點來看待每個有理數，即用來界定一切有理數的集合中的一個分割．

其中(F,φ)是對於一切連續函數 $\varphi(x)$ 皆有定義的數[1]. 並且這個汎函是綫性的,即

$$(F,c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)=c_1(F,\varphi_1)+c_2(F,\varphi_2).$$

有一些綫性汎函不能用連續(或祇是勒貝格可求和)函數 $f(x)$ 藉此公式來表示. 這就暗示我們來定義廣義函數為某個適當的連續函數 $\varphi(x)$的集合 K 上的(任意)綫性汎函(F,φ). 這個集合中的函數$\varphi(x)$稱為基本函數.

如果 $f(x)$是絕對連續的函數,並且有一個微商 $f'(x)$,則其微商也確定一個綫性汎函,即.

$$\int_a^b f'(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

如果在 $\varphi(x)$上附加一些限制,那麼這些新的汎函可藉部分積分用原來的汎函(F,φ)來表示. 對於所有在 a,b 兩點等於零的連續可微函數 $\varphi(x)$,公式

$$\int_a^b f'(x)\,\varphi(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx=-(F,\varphi')$$

恆成立. 這件事實首先暗示給我們一個思想,即集合 K 祇包含具有上述性質函數 $\varphi(x)$,而不包含一切的連續函數;其次暗示我們,對於每個綫性汎函 (F,φ), 無論它所對應的函數 $f(x)$ 有無微商 $f'(x)$,我們總可以定義 F 的一個微商(F',φ)(也是 K 上的綫性汎函)如下:

$$(F',\varphi)=-(F,\varphi').$$

但如果(F',φ)對於 K 中的一切函數φ 皆有定義,我們就必須限制集合K祇包含那樣的一些函數 $\varphi(x)$,使其微商 $\varphi'(x)$也包含在K中. 由此導出: $\varphi(x)$ 必須具有所有各階微商, 而且這些微商和$\varphi(x)$本身在 a,b 兩點皆等於零.

這種函數 $\varphi(x)$的一個重要的例子是

---

1) 這裏的所謂數可以瞭解為實數或複數.

$$\left\{\varphi_{c,d}(x)\right\}^{\frac{1}{n}},$$

其中 n 是任意正整數, 並且 $a \leqslant c < d \leqslant b$, 而

$$\varphi_{c,d}(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{1}{x-c}+\frac{1}{d-x}\right)}, & \text{於 } c < x < d; \\ 0, & \text{對於其它的 } x. \end{cases}$$

我們不必要在 K 上加以其它的限制. 但是在界定函數集合 K 時我們必須注意: 要能使點函數 $f(x)$ 和它所確定的汎函 (F,φ) "等同"起來. 因此我們要讓 K 包含充分多的基本函數, 以使 (a,b) 上相異的函數 $f(x)$ 等同於相異的汎函 (F,φ). 換句話說, 僅僅當 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上等同於零時, 對於 K 中的所有基本函數 $\varphi(x)$, 積分

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$$

才等於零. 但如果集合 K 中包含所有上述的函數

$$\left\{\varphi_{c,d}(x)\right\}^{\frac{1}{n}},$$

那麼這個要求是滿足的. 誠然, 因爲

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\left\{\varphi_{c,d}(x)\right\}^{\frac{1}{n}}dx = \int_c^d f(x)\,dx,$$

而如果對於所有適合不等式 $a \leqslant c < d \leqslant b$ 的 c 和 d, 積分

$$\int_c^d f(x)\,dx = 0,$$

則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上等同於零.

此外, 應該注意的是: 由點函數所確定汎函 (F,φ) 以及它的各階微商 $(F^{(n)},\varphi)$ 具有一定的連續性. 在定義廣義函數時, 我們是希望滿足這些連續性的[1].

最後, 爲便於以後應用起見, 我們來定義一個開區間上的廣義函數. 閉區間給出數學上較簡單的情況, 而開區間可以藉其閉子

1) 我們將在第五節中說明: 這給出局部可求和的點函數系的一個最小的拓廣, 在這拓廣了的函數系中, 每個函數可以求任意次微商.

區間來討論. 在開區間的情況我們仍用"廣義函數"這一術語,而在閉區間的情況則採用"連續綫性汎函"這一術語.

現在我們來表述明確的定義:

廣義函數的定義 命 $[a,b]$ 是一個有窮的閉區間. 以下我們考慮的函數 $\varphi(x)$ 皆爲連續函數, 且具有各階微商 $\varphi^{n}(x)$, 而所有這些微商 $\varphi^{n}(x)$以及函數 $\varphi(x)$本身在 a,b 兩點及$[a,b]$外部皆爲零. 我們用 $K_{[a,b]}$ 表示所有這種函數 $\varphi(x)$的集合. 命(F,φ)是對 $K_{[a,b]}$ 中一切 φ 皆有定義的一個綫性汎函,且具有下列的性質: 如果 φ 和 φ_m 屬於 $K_{[a,b]}$, 並且 $\varphi_m(x)$一致收斂於 $\varphi(x)$, 此外對於每個正整數 n,序列 $\varphi_m^{(n)}(x)$也一致收斂於 $\varphi^{(n)}(x)$,則序列(F,φ_m)收斂於(F,φ). 於是我們就稱汎函(F,φ)爲連續綫性汎函.

命 I 是一個任意的開區間,此區間爲有窮或無窮皆無關緊要; 設 (F,φ) 是一個汎函, 對於 I 中的每個閉區間 $[a,b]$, 此汎函對 $K_{[a,b]}$ 中的所有函數 φ 皆有定義, 且如果祇限於這些函數 φ, 則確定了 $[a,b]$ 上的一個連續綫性汎函. 於是, 我們就稱這種汎函 (F,φ)爲廣義函數.

廣義函數和點函數的等同 我們說開區間 I 上的某個廣義函數(F,φ)等同於點函數 $f(x)$,其意義是: 對於 I 中的每個閉區間 $[a,b]$,函數 $f(x)$在 $[a,b]$ 上皆爲可求和,並且對於 $K_{[a,b]}$ 中的所有 φ,皆有等式

$$(F,\varphi)=\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

有時我們用符號(f,φ)來表示等同於點函數 $f(x)$的廣義函數.

廣義函數和測度函數的等同 我們說開區間 I 上的某個廣義函數(F,φ)等同於司梯鳩斯(Stieltjes)測度 $d\psi(x)$,這句話的意思是指: 在 I 中的每個閉區間$[a,b]$上, $\psi(x)$ 是囿變函數,並且對於 $K_{[a,b]}$ 中的一切 φ, 皆有等式

$$(F,\varphi)=\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x).$$

廣義函數的微商 對於 I 上任何廣義函數 (F,φ)，其微商 (F',φ) 定義爲

$$(F',\varphi) = -(F,\varphi'),$$

不難覆驗 I 上的廣義函數應適合的一切條件 F' 皆滿足(我們注意,即此公式確定了連續綫性汎函的微商).

在上面界定的廣義函數中,包含着所有連續函數和勒貝格(局部)可求和函數、所有司梯鳩斯測度,此外,我們將要看到其中還包含許多新的數學對象. 在廣義函數的範疇中,每個廣義函數具有微商,因而具有所有階的微商:

$$(F^{(n)},\varphi) = (-1)^n(F,\varphi^{(n)}).$$

一個點函數 $f(x)$ 的微商可能是一個點函數或司梯鳩斯測度,也可能既不是點函數也不是司梯鳩斯測度，而是一個更一般的廣義函數. 函數 $f(x)$ 的微商是一個點函數 $g(x)$ 的充分而必要的條件是:在 I 中的每個有窮閉區間 $[a,b]$ 上, $f(x)$ 皆爲絕對連續的函數. 在這個情況下, $f(x)$ 的普通微商 $f'(x)$ 作爲點函數幾乎到處存在,並且這點函數 $f'(x)$ 與廣義微商一致. 函數 $f(x)$ 的微商是一個司梯鳩斯測度 $d\psi(x)$ 的充分而必要的條件是: 在 I 中的每個有窮閉區間 $[a,b]$ 上, $f(x)$ 皆爲囿變函數. 在這個情况下, $\psi(x)$ 和 $f(x)$ 祇相差一個(任意)常數的加項,即 $f(x) = \psi(x) + c$, 其中 c 是一個任意常數.

特別,設 I 爲包含原點的一個開區間,我們可以定義海維賽函數 $Y(x)$ 的微商 $\delta(x)$ 爲測度函數 $dY(x)$,這就是狄拉克 δ-函數適當的數學解釋. 作爲點函數, δ-函數是沒有任何意義的. 現在我們可以寫: $\delta = Y'$.

在某些物理問題上的應用中，一個局部可求和的函數可以用來表示質量或電荷在 x 軸上的一個分佈:於是積分

$$\int_c^d f(x)\,dx$$

便表示 $[c,d]$ 上所有質量或電荷的代數和，而函數 $f(x)$ 則表示質量或電荷分佈在 x 點的密度. 從狄拉克的觀點來看，δ-函數表示集中在原點這一點上的單位電荷，δ' 表示一個偶極子，而 δ 的高階微商則表示更複雜的多極子.

我們來考慮另一個有趣的廣義函數，這廣義函數和狄拉克 δ-函數及其微商極不相像：命 $f(x)$ 是一個普通的點函數，當 $x>0$ 時，$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$；當 $x\leqslant 0$ 時，$f(x)=0$. 雖然其微商甚至都不是司梯鳩斯測度，但這微商作爲廣義函數是存在的. 粗略地說，f' 相當於連續分佈在正 x 軸上的負質量，它在原點的每個鄰域中分布了一個無窮的負量；而它在原點有一個無窮的正質量，以致在每個有窮的閉區間中的質量的代數和是有窮的. 這因爲對於

$$\varphi\in K_{[a,b]},\ a<0<b,$$

$$\begin{aligned}(f',\varphi) &= -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_0^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx=\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^b x^{-\frac{1}{2}}\,\varphi'(x)\,dx =\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(x^{-\frac{1}{2}}\varphi(x))\Big|_\varepsilon^b + \int_\varepsilon^b \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\varphi(x)\,dx\right]=\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\varphi(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_\varepsilon^b\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)\varphi(x)\,dx\right]=\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_\varepsilon^b\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)\varphi(x)\,dx\right],\end{aligned}$$

因爲當 $\varepsilon\to 0$ 時，

$$\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}\to 0\cdot\varphi'(0)=0.$$

雖然對於 $K_{[a,b]}$ 中的任意函數 φ，$-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\varphi(x)$ 在 $[0,b]$ 上不一定可求和，但整個方括弧中的量

$$\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_\varepsilon^b\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)\varphi(x)\,dx$$

恆有一個有窮的極限. 阿達瑪(Hadamard)稱這極限爲發散積分的"有窮部分". 以後,我們將採用記號

$$(f',\varphi)=\mathrm{F.p.}\int_0^b f'(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 對於正 x 的微商,它是不可求和的點函數. 阿達瑪已經很詳細地研究了發散積分的有窮部分[1].

同樣,綫性泛函

$$(F,\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\int_a^{-\varepsilon}+\int_\varepsilon^b\right)\frac{1}{x}\,\varphi(x)\,dx\right]$$

則相應於 x 軸上一種質量分布:沿正 x 軸上分布着無窮的正質量,沿負 x 軸分布着無窮的負質量,而在原點的每個鄰域中質量的代數和是有窮的. 括弧中的表達式

$$\left(\int_a^{-\varepsilon}+\int_\varepsilon^b\right)\frac{1}{x}\,\varphi(x)\,dx$$

的極限是發散積分的阿達瑪有窮部分的另一情形,在這情形,它和柯西(Cauchy)主值相一致. 而這廣義函數本身乃是點函數 $\ln|x|$ 的微商.

§ 3. 廣義函數的運算

一個廣義函數和一個常數之間乘法以及二廣義函數的加法是由下列公式來界定的:

$$(cF,\varphi)=c(F,\varphi),(F_1+F_2,\varphi)=(F_1,\varphi)+(F_2,\varphi).$$

不難驗證,對於這兩個算術運算,普通的規則仍然成立;而且對於微分運算,普通的規則也成立,即

$$(c_1F_1+c_2F_2)'=c_1F_1'+c_2F_2'.$$

如果一個點函數 $f(x)$ 是常數,即 $f(x)=k$,則此點函數 $f(x)$

---

1) Hadamard, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Paris, 1932.

便等同於常數-廣義函數 (k,φ)，所謂常數-廣義函數是由下列等式所界定的：

$$(k,\varphi)=\int_a^b k\,\varphi(x)\,dx=k\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

對於 $K_{[a,b]}$ 中的每個函數 φ (其中 $[a,b]$ 是 I 中的任意閉區間)．特別，當 $k=0$ 時，則相應的廣義函數就叫作零廣義函數．不難驗證：如果 F 是一個常數-廣義函數，那麼 F' 便是零廣義函數．為了證明逆定理，我們首先建立一個展式引理如下：

引理．命 $\theta(x)$ 是 $K_{[c,d]}$ 中的任意函數，適合[1]

$$\int_c^d \theta(x)\,dx=1,$$

並且命 n 是任意一個正整數．則任意 $K_{[a,b]}$ $(a\leqslant c<d\leqslant b)$ 中的任意函數 $\varphi(x)$ 恆可以表示為下列的形式：

$$\varphi(x)=a_0\theta(x)+a_1\theta'(x)+\cdots+a_n\theta^{(n)}(x)+\rho_n^{(n+1)}(x),\qquad (*)$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是唯一確定的常數，而 $\rho_n(x)\in K_{[a,b]}$．

為了證明這個引理，我們首先注意：$K_{[a,b]}$ 中的某一函數 $\varphi(x)$ 能表示成 $K_{[a,b]}$ 中某個函數 $\rho(x)$ 的微商，其充分而必要的條件是

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt=0.$$

此外，在 $K_{[a,b]}$ 的普通函數 $\varphi(x)$ 的展式中，

$$a_0=\int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

然後對 n 作數學歸納法便可以證明我們的引理．

應用展式(*)(其中 $n=0$)，我們就可以證明：如果 $F'=0$，則 F 是常數-廣義函數．誠然，因為 $(F,\rho_0')=-(F',\rho_0)=0$，所以

$$(F,\varphi)=(F,a_0\theta+\rho_0')=a_0(F,\theta)+(F,\rho_0')=a_0k,$$

1) 譬如，我們可以取

$$\theta(x)=\left\{\int_c^d \varphi_{c,d}(t)\,dt\right\}^{-1}\varphi_{c,d}(x)$$

作一實例，其中 $\varphi_{c,d}(x)$ 是 §2 中定義的函數．

其中 $k = (F, \theta)$ 是常數. 因此

$$(F, \varphi) = \int_a^b k\,\varphi(t)\,dt,$$

這就證明了 F 確實是常數-廣義函數.

如果 $G' = F$, 我們便說函數 G 是 F 的原函數. 由前段中所述的事實導出: 同一個廣義函數 F 的二原函數相差一常數-廣義函數.

大家知道, 在點函數的情形, 有無窮個不同的原函數(點函數)存在. 並且祇要指出它在某一點的數值, 便足以確定其中的一個. 而在任意廣義函數 F 的情況, 也仍然有無窮個原函數(廣義函數!)存在, 並且祇要指出它對於任一特定的基本函數 $\theta(x)$ 的數值, 便可以確定其中的一個; 這可以從下列的關係式立刻看出:

$$(G, \varphi) = (G, a_0\theta + \rho_0') = a_0(G, \theta) + (G, \rho_0') =$$
$$= a_0(G, \theta) - (F, \rho_0).$$

對於任何一個函數 φ, 這個關係式恆可以用來通過 (G, θ) 的數值和已給的廣義函數 F 來確定 (G, φ); 由公式(*)於 $n = 0$ 時, 不難推出

$$\rho_0(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt - \left\{\int_a^b \varphi(t)\,dt\right\}\int_a^x \theta(t)\,dt,$$

藉助這個等式可以證明 G 是廣義函數.

§4. 廣義函數的乘積

並非對一切廣義函數 F_1 和 F_2 皆可定義其乘積 F_1F_2. 這反映了一個事實: 兩個局部可求和函數的乘積 $f_1(x)\,f_2(x)$ 可能不是局部可求和函數.

但在許多情形, 我們可以定義 F_1F_2. 例如, 若 F_1 和 F_2 等同於點函數 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 且乘積 $f_1(x)\,f_2(x)$ 為局部可求和, 則 F_1F_2 可以定義為等同於 $f_1(x)\,f_2(x)$ 的廣義函數. 這是下述一般定義的一個特殊情況.