

初中自然科学补充读物

怎样列方程

蔡君时 著



中国青年出版社

初中自然科学补充读物

怎样列方程

蔡君时 著

中国青年出版社

1958年 北京

怎样列方程

蔡君时著

*

中国青年出版社出版

(北京东四12条老君堂11号)

北京市书刊出版业营业许可证出字第036号

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店总经售

*

787×1092 1/32 3 3/8印张 61,000字

1956年7月北京第1版 1958年3月北京第4次印刷

印数 196,001—229,000

统一书号: 13009·46

定价(8)三角四分

目 次

一	日常的語言和代數的語言	1
二	列方程的步驟	2
三	用列表的形式分析條件	4
四	用圖示的形式分析條件	10
五	怎樣設立未知數	13
六	組織方程應該注意的地方	15
七	同一個題目可以列出不同的方程	18
八	三個步驟要靈活運用	27
九	考慮問題一定要結合實際	29
一〇	分類例題	34
	有關數目的問題(35) 年齡問題(43) 工作問題(45) 注水放水問題(52) 勻速運動問題(57) 流水行船問題(65) 車輪問題(72) 混合物問題(75) 槓桿問題(82) 有關幾何圖形的問題(91) 雜題(99)	

一 日常的語言和代數的語言

偉大的物理學家和數學家牛頓，在他寫的一本代數書里說過這樣的話：“要想解一個有關數目的問題或有關量的抽象關係的問題，只要把問題里的日常的語言翻譯成代數的語言就成了。”

所謂代數的語言，就是方程。

把日常的語言翻譯成代數的語言，就是列方程。

初學代數的人，學到方程，覺得一個現成的方程還容易解，要從一個應用題列出方程來，卻常常很困難。

這是完全可以理解的。解一個現成的方程，不論是一元多元，一次二次，往往有一定的解法，或多或少地帶些機械的性質。列方程就不同了。一個問題有一個問題的性質，牽涉到的事情不同，包含的數量關係也不同；全靠你自己根據題意找出線索來。有的題目很複雜，包含的數量關係很多，抽不出一個頭緒來，也就列不出方程。有的題目牽涉到的事情是你所不熟悉的，那就更加束手無策了。

是的，要從一個應用題列出方程來，並沒有機械的刻板的方法，要你根據題意來隨機應變。但是，正如牛頓所說的，列方程其實只是把日常的語言翻譯成代數的語言。所以只要你懂得怎樣把日常的語言翻譯成代數的語言，你也就找到了列方程的竅門。

二 列方程的步驟

那么怎样把日常的语言翻譯成代数的语言呢？也就是怎样來列出方程呢？

一个对列方程熟練的人，可能一看到題目，就能提起筆寫出方程來，一个初学的人，当然沒有这个本領，那我們可以一步一步來做。

第一步是理解題意。拿到一个題目，先應該懂得題目里說的什么。在看題目的时候，應該正确理解題目里某些名詞和某些語句的意思。比方在匀速运动的問題里，提到速度，應該知道速度是指每天、或每小时、或每分鐘、或每秒鐘走的路程。在連續数的問題里，提到偶数奇数，應該知道偶数是用2可以整除的整数，奇数是不能用2整除的整数。还有題目里常常說到甲比乙多多少，或甲加了多少以后等于乙，这里應該分別出究竟說的是哪一个数大：甲比乙多多少，是甲大乙小；甲加了多少以后等于乙，是甲小乙大。又像講到完成計劃的題目里，如果說完成計劃百分之90，是說沒有全部完成計劃；如果說超額百分之90，那就是一共完成原計劃的百分之190。題目里諸如此类的名詞語句，一定要細細辨別，如果这些地方理解錯了，那你即使列出了方程，也一定是錯誤的。

第二步是条件的摘錄和分析。每一个問題里一定告訴你一些条件，要你根据这些条件來找出某些未知的数量。所以把这些已知的条件和要求的数量列举出來，寫成簡單摘錄的

形式，对你列方程是有很大帮助的。因为摘錄条件就是把題目里無關緊要的話句取消了，使我們能集中注意力來考慮，怎样根据这些条件來組織方程。有的題目比較簡單的，只要把条件摘錄出來，就已經可以看出應該怎样把这些条件組合起來，但是一般比較複雜的題目，往往需要進一步把这些条件進行分析，把这些条件的明顯的或隱蔽的相互关系找出來，才能考慮怎样把它們組合在一个或几个方程里。遇到这样的題目，可以把条件摘錄和条件分析結合起來做，就是一边摘錄条件，一边就進行分析。摘錄和分析条件可以用列表的形式，也可以用圖示的形式。至于具体怎样做，我們到下面再講。

分析了条件以后，第三步就可以組織方程了。你知道方程就是等式，不过不是恆等式，而是条件等式，只有在式里代表未知数的文字等于某一个或某一些一定数值的时候，这种等式才成立。所以組織方程的方法，就是根据已經分析的条件，找出某些数量之間的相等关系來。只要这些相等的数量里面包含有所求的未知数，这样寫出來的等式就是我們所求的方程。这一步一般說來是并不怎么困难的，如果在分析条件的时候考慮得周到，那水到渠成，就很容易把方程寫出來。

把这三步合起來，就是上面說的把日常的語言翻譯成代数的語言。这里第一步的重点是在日常的語言，所謂理解題意就是懂得題目里原來說的日常的語言。第二步做的就是翻譯的工作，这是列方程的主要一步工作，即使是一个熟練的人，尽管他形式上並沒有把怎样分析条件一步步寫出來，但是他腦子里一定要做这一番工作，才能寫出方程來。至于寫出

方程來这最后一步工作,只是第二步工作的結果,就是經過翻譯得出了代数的語言。

現在我們把第二步工作再着重地說一說,連帶地也就一些具体例子說明理解題意應該注意的地方。

三 用列表的形式分析条件

先來举一个比較簡單的例子:

例一 某工厂訂出了某月的產量計劃数字,到月底实际制成了 1725 件產品,比原訂計劃超額了 15%,求原訂的計劃数字。

在这一个題目里,我們應該先研究明白,所謂“比原訂計劃超額了15%”,就是說現在实际制成的 1725 件,比原訂計劃数字大了 15%,而所謂“15%”,是对原訂計劃数字說的,就是超过的部分等于原訂計劃数字的 15%。这一步工作就是所謂正确理解題意的工作,正确理解了題意以后,就可以把条件摘錄下來:

已 知 条 件		要 求
实际制成件数	1725件	原訂計劃数字
比原訂計劃大	15%	

像这一个例題是比較簡單的,可以不再經過条件分析,就把方程組織起來。現在再举一个例子:

例二 某工厂要制造某一定数量的某种產品:如果开一

部大机器,10小时可以完成;如果开一部小机器,15小时可以完成。现在两部机器同时开,问几小时可以完成?

这一个题目的意思很明白,没有什么问题。如果只把条件摘录下来,也还看不出它们之间的相等关系。因为大机器完成全部产品的时间、小机器完成全部产品的时间和两部机器同时开完成全部产品的时间,相互间没有一个简单的关系。所以题目的关键,是要从完成产品的时间来推出每小时完成全部产品的几分之几,因为就每小时完成产品的分量来说,两部机器同时开完成的分量,就等于各部机器单独开完成的分量的总和,是一个简单的“加”的关系。现在我们可以这样来进行条件分析:

已知条件		分 析	要 求
大 机 器 完成时间	10小时	大机器每小时完成全部产品的 $\frac{1}{10}$	两部机器同时开的完成时间 (从两部机器同时开完成产品的分量来考虑)
小 机 器 完成时间	15小时	小机器每小时完成全部产品的 $\frac{1}{15}$	

从上面这样的分析,我们就有可能找出数量的相等关系来,也就是可以列出方程来。

我们知道在方程里一般是用 x , y 等文字来代表要求的数的,也就是所谓未知数。在分析条件的时候,如果就用这些文字来代表要求的数,把已知条件和要求的数量结合起来考虑;往往可以把关系分析得更清楚。就像上面这个例子,我们可以这样分析:

	完成時間, 小时	每小时完成全部產品的
大机器单独开	10	$\frac{1}{10}$
小机器单独开	15	$\frac{1}{15}$
兩部机器同时开	x	$\frac{1}{x}$

下面我們再举几个例子, 來說明这种分析条件的方法:

例三 某紗厂有一只調漿桶, 貯滿了生漿。先放出生漿的一半又 $\frac{1}{2}$ 公斗, 再放出剩下的一半又 $\frac{1}{2}$ 公斗, 最后又放出剩下的一半又 $\frac{1}{2}$ 公斗, 还剩 6 公斗。問原有生漿多少公斗?

在这一个題目里, 所謂“先放出生漿的一半又 $\frac{1}{2}$ 公斗”, “一半”是指全部生漿的一半, 而“ $\frac{1}{2}$ 公斗”是和全部生漿的分量沒有关系的。其次所謂“所剩下的一半”, 不是原有生漿的一半, 而是放出以后剩下的一半, 兩次“所剩下的一半”并不是相等的, 这是我們在理解这个題目的意思的时候應該注意的。

現在我們來進行分析, 这里要求的是原有生漿的分量, 我們就設原有生漿 x 公斗。

	放出量, 公斗	剩 下 量, 公 斗
原 有		x
第 一 次	$\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$	$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$
第 二 次	$\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{1}{2}$	$\frac{x-1}{2} - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] = \frac{x-3}{4}$
第 三 次	$\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{4}\right) + \frac{1}{2}$	$\frac{x-3}{4} - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{4}\right) + \frac{1}{2}\right] = \frac{x-7}{8}$
最 后		6

这个题目里生漿的数量，經過了多次变化，我們逐次分析，变化的过程就很清楚。每次分析的时候，把剩下量随手化簡，关系就看得更明白。

例四 一輛車子走 12 公尺的路，前輪比后輪多轉 6 次。如果前輪周長增加 $\frac{1}{4}$ ，后輪周長增加 $\frac{1}{5}$ ，那么前輪比后輪多轉 4 次。求各輪的周長。

理解这个题目有兩点應該注意：一是所謂周長增加 $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{5}$ ，不是增加 $\frac{1}{4}$ 公尺或 $\frac{1}{5}$ 公尺，而是增加原周長的 $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{5}$ 。就是說，假定原周長是 0.5 公尺，增長 $\frac{1}{4}$ 就是增長 0.125 公尺，增長 $\frac{1}{5}$ 就是增長 0.1 公尺；假定原周長是 0.6 公尺，增長 $\frac{1}{4}$ 就是增長 0.15 公尺，增長 $\frac{1}{5}$ 就是增長 0.12 公尺。二是兩次所走的路都是 12 公尺。

在進行分析的时候，关键是在懂得輪的周長、轉的次數和車子走的路程之間的关系。如果輪的周長是 0.5 公尺，那轉 1 次車子就前進 0.5 公尺，轉 2 次車子就前進 1 公尺；如果輪的周長是 0.6 公尺，那轉 1 次車子就前進 0.6 公尺，轉 2 次車子就前進 1.2 公尺。所以

輪的周長 $\times$ 轉的次數 = 車子走的路程

或

$$\text{輪的周長} = \frac{\text{車子走的路程}}{\text{輪轉的次數}}$$

或

$$\text{輪轉的次數} = \frac{\text{車子走的路程}}{\text{輪的周長}}$$

現在題目要求的是各輪的周長，我們就設前輪周長 x 公尺，后輪周長 y 公尺。

		前 輪	后 輪
原	周長, 公尺	x	y
	路程, 公尺	12	
來	轉動次數	$\frac{12}{x}$	$\frac{12}{y}$
	次數相差	6	
改	周長, 公尺	$x + \frac{1}{4}x = \frac{5}{4}x$	$y + \frac{1}{5}y = \frac{6}{5}y$
	路程, 公尺	12	
變	轉動次數	$\frac{12}{\frac{5}{4}x}$	$\frac{12}{\frac{6}{5}y}$
	次數相差	4	

例五 有烟絲兩籬，第一籬里甲級烟絲和乙級烟絲是5和3的比，第二籬里是7和3的比。問從兩籬里各取烟絲多少公斤，才能得到一種新的混合烟絲，里面含甲級烟絲6公斤，乙級烟絲3公斤？

這個題目在理解上没有什么困難。在條件分析上，關鍵是在：知道了兩級烟絲的比，要求出各級烟絲在混合烟絲里所占的成分是幾分之幾。例如第一籬烟絲里甲級和乙級是5和3的比，意思就是說每有5斤甲級烟絲就有3斤乙級烟絲，也就是說，每8斤(5斤+3斤)烟絲里有甲級5斤，乙級3斤，所以甲級占 $\frac{5}{8}$ ，乙級占 $\frac{3}{8}$ 。懂得了這一點，分析起來就容易了。題目要求的是從兩籬里各取烟絲多少公斤，我們就設從第一籬里取烟絲 x 公斤，從第二籬里取烟絲 y 公斤。

		烟絲的比	所占成分	取的重量， 公斤	所占分量， 公斤
第一罐	甲級	5 :	$\frac{5}{8}$	} x	$\frac{5}{8}x$
	乙級	3 :	$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}x$
第二罐	甲級	7 :	$\frac{7}{10}$	} y	$\frac{7}{10}y$
	乙級	3 :	$\frac{3}{10}$		$\frac{3}{10}y$
新混合 烟 絲	甲級				6
	乙級				3

从上面这些例子看出，用列表的形式來分析条件，不但眉目清楚，而且条件也不会遺漏。分析条件是列方程的一个重要关键，只要你能分析条件，列方程就并不困难。反过来如果你不把题目里的条件分析清楚，方程是列不出来的。对于条件有变化的题目，更应该仔细分析变化的过程，才能了解变化前后的具体情况。在分析的时候，还可以随手把条件间的关系化简，这样列出方程來也更清楚。

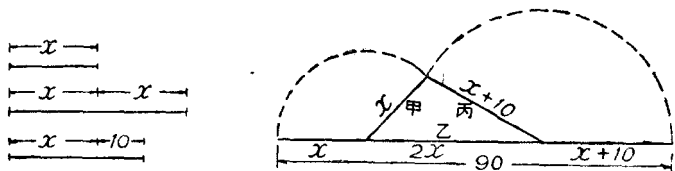
从上面这些例子也可以看出，分析条件的困难，是在找出有关数量之间的关系，特别是隐蔽的关系。这些关系题目里并没有明白說出，要你自己根据实际事物的性质來决定。就像上面例二里从机器完成全部产品的時間來推出每小时完成产品的分量，例四里輪的周長、轉的次數和車子走的路程之間的关系，就都是题目里所沒有的。为了帮助讀者解决这一困难，在这本小册子的末一章里，我們酌选了几类常見的应用題來詳細分析，这里就不多說了。

四 用圖示的形式分析條件

有些應用題里，各種條件之間的关系，一下子不容易看出，而且條件繁多，變化複雜。遇到這種題目，固然也可以用列表的形式來分析條件，但是如果用圖來表示，各種條件之間的关系常常可以看得比較明顯，因為這些关系本來很抽象，一畫成圖，就比較具體。特別是題目里本來牽涉到圖形的，那用圖表示當然可以一目了然了。下面我們舉幾個例子：

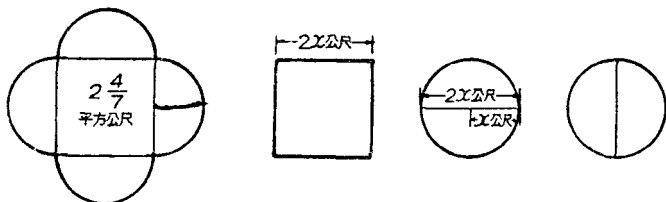
例一 三角形乙邊的長是甲邊的 2 倍，丙邊比甲邊長 10 厘米。已知周界是 90 厘米，求各邊的長度。

這一個題目講的是一個三角形，如果把這個三角形的圖畫出來，那它的各邊和周界之間的数量关系，就會一目了然。這裡要求的是各邊，已知乙邊的長是甲邊的 2 倍，丙邊比甲邊長 10 厘米，所以可以設甲邊的長是 x 厘米，那麼乙邊的長就是 $2x$ 厘米，丙邊的長是 $x+10$ 厘米。畫成圖，就像下面這樣：



例二 工人文化宮里的牆上有一扇窗，中央是正方形，四周是半圓形，它的面積是 $2\frac{4}{7}$ 平方公尺。求半圓形的半徑。

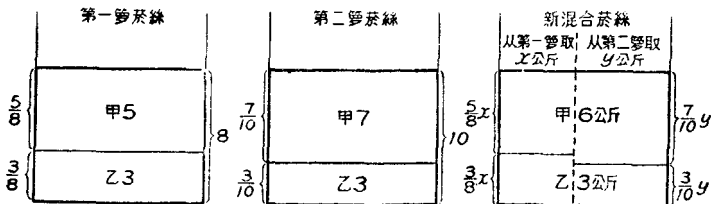
這一個題目也是跟圖形有關的，所以適宜於用圖來表示。題目里要求的是半圓形的半徑，就設圓的半徑是 x 公尺。



從圖上看出，圓的直徑就是正方形的邊長，合四個半圓形恰好成兩個等圓，所以窗的面積等於正方形和兩個等圓面積的和，數量關係就很明顯了。

例三 有煙絲兩籬，第一籬里甲級煙絲和乙級煙絲是5和3的比，第二籬里是7和3的比。問從兩籬里各取煙絲多少公斤，才能得到一種新的混合煙絲，里面含甲級煙絲6公斤，乙級煙絲3公斤？

這就是上一章例五，用圖表示，數量關係會看得更清楚。仍舊設從第一籬取煙絲 x 公斤，從第二籬取煙絲 y 公斤。



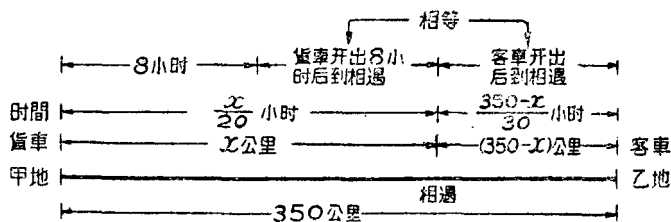
你看，各籬煙絲里兩級煙絲所占的成分，和新混合煙絲里兩級煙絲的分量，圖上不是表示得很明顯嗎？

例四 貨車一列，從甲地開往乙地，速度每小時 20 公里。8 小時後，客車一列，從乙地開往甲地，速度每小時 30 公里。兩地相距 350 公里，問兩車相遇的地点離開甲地多少公里？

这个题目如果把甲乙两地的距离用线表示出来，再来看货车走的路和客车走的路的关系，以及它们走的时间的关系，就会很明显。这里时间跟路程和速度的关系是

$$\text{时间} = \frac{\text{路程}}{\text{速度}}$$

我们设相遇的地点离开甲地 x 公里。



从上面这些例子看出，图示的好处是数量关系显示得十分清楚。画图应该注意的是：第一，画图之前，先把题意看懂，然后决定各条件和未知数应该怎样表示，才合于题目里所说的实际情况。就像上面例三讲的是盛在罐里的混合烟丝，我们就用 $\square$ 来表示罐，把原来两罐里两级烟丝的比表示出来，再把新的混合烟丝里两级烟丝的分量根据原来两罐里两级烟丝的比表示出来，这样就把混合的过程表示得很明显。上面例四因为是两地之间的运动距离，那就可以用直线表示。第二，画出之后，应该再跟题目对一下，看看有没有歪曲题意的地方，照这样画，数量关系是不是明显。第三，有些题目的数量关系比较简单，那就用不到画图，因为画图总比较费事。第四，图要尽可能画得正确，线段长短，面积大小，应该跟题目里的条件相符。当然，含有未知数的数量，只能大概估计，不能

准确画出，但它跟别的数量之间的关系，应该跟题目所说的相符。总之，图示是把实际事物用简化的图表示出来，使得事物的变化过程和相互关系显露出来。所以如果原来事物不容易用简化的图表示出来，就不必用图示形式来分析条件。

五 怎样設立未知数

上面講分析条件的时候，在分析条件之前，都要先决定用什么做未知数。設立未知数对于初学的人來說，有时候也有困难。初学的人拿到一个题目，不知道应该用什么做未知数，于是随便乱凑，結果当然列不出正确的方程。所以如果把列方程比方做旅行，理解題意好比是出發前的准备工作，而設立未知数就是出門第一步。如果第一步跨不出去，或者跨出去一脚陷在泥坑里，那要想順利地走到目的地，就不大可能。

設立未知数有没有一定規則呢？一般說來，題目里問的是什麼，我們就設什麼是未知数。就像上面兩章的例子，都是這樣的。

但是，也有这样的情形：題目里問的不只是一個數量，而是兩個或幾個數量，應該怎麼辦呢？從上面的例子可以看出，我們可以把這幾個數量都設做未知数。就像第三章的例四，問的是兩個輪子的周長，我們就設前輪的周長是 x ，後輪的周長是 y 。又像同一章的例五，也是這樣：用 x 代表從第一籬取的烟絲公斤數， y 代表從第二籬取的烟絲公斤數。但是也可以只設一個未知数，就像第四章的例一。這個題目問的是三