

高等学校试用教材

物探数据处理的方法

上册

长春地质学院 陈天与 徐中信

地质出版社

高等学校试用教材

物探数据处理的数学方法

上 册

长春地质学院
陈天与 徐中信

地 质 出 版 社

物探数据处理的数学方法

上册

长春地质学院 陈天与 徐中信

责任编辑 何宝侃

*

地质部教育司教材室编辑

地质出版社出版

(北京西四)

沧州地区印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本: 850×11681/32印张: 85/16字数: 210,000

1981年7月北京第一版·1981年7月沧州第一次印刷

印数1—4,620册·定价1.30元

统一书号: 15038·教119

前 言

一、本教材是在我们过去编写的讲义基础上，并遵照1979年春地质部教育司教材组在北京召开的《物探数据处理的数学方法》编写会议通过的大纲编写的。后经广泛征求兄弟院校的意见，又对教材的内容作了进一步修改。

二、本书的部分内容曾在专业课内讲授过，也有部分内容放在高年级的数学课中讲授。但是，随着物探数字技术的深入发展，以及它所涉及的内容越来越广泛，实践证明，把这些密切结合专业的数学方法抽出来，作为一门独立的课程进行讲授，无论对基础课或是专业课的教学都是十分有利的。

三、全书分为上、下两册，上册着重讲述数字信号处理的数学方法，主要包括富氏变换、沃希变换和两种变换的快速处理，以及希尔伯特变换等。下册着重讲述地球物理勘探正、反演问题中的数学方法、主要包括各种方程的数值解法，数值逼近和反演问题的最优化处理等。本书可作为应用地球物理专业及相近专业高年级学生的试用教材，也可供从事数据处理方面的工程技术人员参考。

四、讲授本书大约需要100学时左右，如果学时数不够时，可略去书中带星号的部分。

五、本书由成都地质学院何宝侃付教授主审。参加审稿的单位还有地质部物探所黄树棠工程师，石油部物探局研究院牛毓荃工程师，长春地质学院景毅教授，杨友发同志，河北地质学院杨鸿型、周晓翠、王俊茹同志，地质部长春计算站高文培同志等。会审的同志提出了许多宝贵的意见。对此，编者表示衷心的感谢。

六、本书是在地质部教育司教材室和长春地质学院教务处教

材组的具体组织和支持下编写的。在上册的编写和内审中，罗秉忠、周静娥和胡锡全同志曾对原稿中个别章节不当之处提出了具体的改进意见。在下册第六章中，曾就某些问题和穆石敏付教授、李世华同志作过有益的讨论。李世华同志曾参加本书大纲的讨论。参加下册内审的同志有杨天行、付泽周、姜佩仁、田树槐和范传瑞等。张卿同志参加了下册中个别章节原稿的抄写及一些例题的计算。中国科学院兰仲雄教授对本书的编写曾给予大力支持和帮助。在此，仅向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中错误和缺点在所难免。希望使用本书的教师、同学和其它读者批评指正。

编 者

1980.9

目 录

FFT

前言

FFT

离散傅里叶变换

离散傅里叶变换

离散傅里叶变换

第一章	连续富里叶变换	1
-----	---------------	---

§1.1	富里叶级数与离散频谱	1
------	------------------	---

§1.2	富里叶变换与连续频谱	11
------	------------------	----

§1.3	线性时不变系统的滤波理论概要	29
------	----------------------	----

第二章	离散富里叶变换 (DFT)	35
-----	---------------------	----

§2.1	连续信号的抽样	35
------	---------------	----

§2.2	离散富里叶变换	42
------	---------------	----

§2.3	DFT 的性质	45
------	---------------	----

§2.4	离散信号的功率谱、振幅谱与相位谱	52
------	------------------------	----

§2.5*	泄漏效应与窗函数	53
-------	----------------	----

§2.6	离散信号的 Z 变换	60
------	------------------	----

第三章	离散褶积与离散相关	71
-----	-----------------	----

§3.1	线性时不变离散系统	71
------	-----------------	----

§3.2	离散褶积的计算	76
------	---------------	----

§3.3	循环褶积	80
------	------------	----

§3.4*	分段褶积	85
-------	------------	----

§3.5	反褶积的计算	92
------	--------------	----

§3.6	离散相关	97
------	------------	----

第四章	沃希函数与沃希变换	101
-----	-----------------	-----

§4.1	第一类沃希函数的定义与性质	101
------	---------------------	-----

§4.2	第一类沃希变换	115
------	---------------	-----

§4.3	第二类沃希函数	126
------	---------------	-----

§4.4*	第三类沃希函数	133
-------	---------------	-----

§4.5*	三类 WF 间以及三类沃希变换间的关系	136
-------	---------------------------	-----

第五章 快速富氏变换与快速沃希变换	138
§ 5.1 快速富氏变换 (FFT)	138
§ 5.2 基数为 2 的两种 FFT 算法	150
§ 5.3 实序列的 FFT 算法	165
§ 5.4 快速褶积	171
§ 5.5 第二类快速沃希变换	174
§ 5.6* 第一类快速沃希变换	180
第六章 二维及高维富氏变换与沃希变换	185
§ 6.1 二维信号与系统	185
§ 6.2 二维系统的频率响应	189
§ 6.3 二维 Z 变换	191
§ 6.4 二维 DFT 与二维 FFT	193
§ 6.5 二维 DWT 与二维 FWT	203
§ 6.6* n 维 DFT 与 n 维 FFT	210
§ 6.7* n 维 DWT 与 n 维 FWT	217
附录 A* 希尔伯特变换	223
A.1 因果序列的 Z 变换的实部与虚部的关系	223
A.2 最小相位滞后序列	228
A.3 对于周期序列的 DFT 的希氏变换	235
A.4 复序列的希尔伯特变换	239
习 题	246
参考文献	260

第一章 连续富里叶变换

在处理物探数据时，特别在进行频谱分析和应用滤波方法中，富里叶分析已成为一种重要的运算工具。

本章从一个复杂的连续信号分解为许多简单的正、余弦信号之和这一问题出发，概述了富里叶级数与离散频谱，富里叶变换与连续频谱。这样，就可以了解一个复杂连续信号的性质，并对它进行分析和处理，以便在实际问题中加以应用，在本章末，作为对富里叶变换的一个应用，我们还简要地讨论了线性时不变系统的滤波理论。

§ 1.1 富里叶级数与离散频谱

一、富里叶级数

在应用富里叶分析这一工具处理物探数据时，我们将实际问题中获得的每一连续信号，均视为随时间变化的连续波形。从物理学知道，最简单的波形是正、余弦波。那么，满足什么条件的连续波，能够分解成不同频率的正、余弦波之和呢？我们指出，

在周期区间 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 内连续或只有有限个第一类不连续点和有

有限个极值点的一个以 T 为周期的周期波，就能够分解成不同频率的正、余弦波的迭加。在数学上表示出来就是，满足上述条件的周期函数 $x(t)$ ，可以展成如下富里叶级数

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1.1)$$

其中

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (1.2) \\
 (n &= 0, 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

在分式 (1.1), (1.2) 中, T 是波形的周期, $f_0 = \frac{1}{T}$ 是基本频率, $\omega_0 = 2\pi f_0$ 是基本角频率。

除展开式 (1.1) 外, 在工程中常使用更简便的复数形式的富里叶级数

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t} \quad (1.3)$$

其中

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (1.4) \\
 (n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots)
 \end{aligned}$$

在公式 (1.3) 中, $C_n e^{in\omega_0 t} = C_n e^{in2\pi t/T}$ 是周期波 $x(t)$ 的某一频率分量。 $\frac{1}{T}$ 是基频, $\frac{n}{T}$ 是倍频。在此情形, 周期波 $x(t)$ 就分解成以 $\frac{n}{T}$ 为频率的不同频率分量 $C_n e^{i2\pi n t/T}$ 的叠加。

两种展开式 (1.1) 与 (1.3) 的系数之间有如下关系

$$\begin{cases} C_0 = a_0/2 \\ C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \\ (n \geq 1) \end{cases}$$

例1 设 $x(t)$ 以 T 为周期, 而在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上定义为:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } -\frac{T}{2} \leq t < -\frac{d}{2} \\ A & \text{当 } -\frac{d}{2} \leq t \leq \frac{d}{2} \\ 0 & \text{当 } \frac{d}{2} < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

这是周期门函数，它表示周期方波。(见图1·1)。

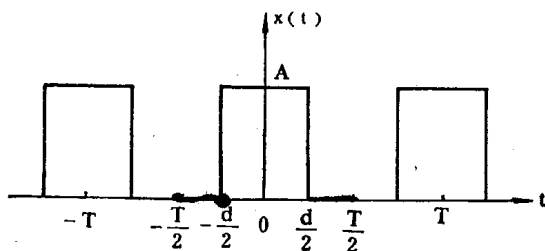


图 1·1

根据公式(1·4)，可计算出 C_n

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-d/2}^{d/2} A e^{-in\omega_0 t} dt \\ &= \frac{2A}{n\omega_0 T} \left[\frac{e^{in\omega_0 d/2} - e^{-in\omega_0 d/2}}{2i} \right] = \frac{2A}{n\omega_0 T} \sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right) \\ &= \frac{Ad}{T} \left[\frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}{\frac{n\omega_0 d}{2}} \right] = \frac{Ad}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right) \frac{\sin x}{x} \\ &= \frac{Ad}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi d}{T}\right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

于是由公式(1·3)，便得到周期门函数 $x(t)$ 的富里叶展开式

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Ad}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi d}{T}\right) e^{\left(\frac{in2\pi}{T}\right)t} \quad (1.7)$$

二、离散频谱与功率谱

1. 离散频谱及其性质

从公式(1.4)看到, C_n 是离散频率 $n\omega_0$ 的函数, 故称为周期信号 $x(t)$ 的离散频谱。又因为 C_n 一般是复数值, 故可写为

$$C_n = |C_n| e^{i\theta_n} \quad (1.8)$$

$|C_n|$ 与 θ_n 分别是 C_n 的振幅与相位, 并且都是频率 $n\omega_0$ 的函数。所以我们称 $|C_n|$ 为 $x(t)$ 的振幅谱, 称 θ_n 为 $x(t)$ 的相位谱, 因此, 在频率域中, 我们需要用两个离散谱 $|C_n|$ 与 θ_n 来表示周期信号 $x(t)$ 。但在许多情况下, C_n 不是复数值, 这时就可 用一个离散谱表示 $x(t)$ 。

例2 求例1中周期门函数 $x(t)$ 的频谱并作图。

公式(1.6)已给出该周期门函数 $x(t)$ 的频谱 C_n , 并且是实的。我们考虑 d 与 T 的三种情形来画出频谱 C_n 。

第1种情形: 假设 $d = \frac{1}{10}$, $T = \frac{1}{2}$ 。这时基本频率 $\omega_0 = 2\pi/T = 4\pi$, 且频率间隔 $\Delta\omega = 4\pi$, 于是得到频谱 $C_n = (A/5) \text{sinc}(n\pi/5)$ 。图形见图1.2a。

第2种情形: 假设 $d = \frac{1}{10}$, $T = 1$ 。这时基本频率减小为 $\omega_0 = 2\pi$, 频率间隔 $\Delta\omega = 2\pi$ 。频谱 $C_n = (A/10) \text{sinc}(n\pi/10)$ 。图形见图1.2b。

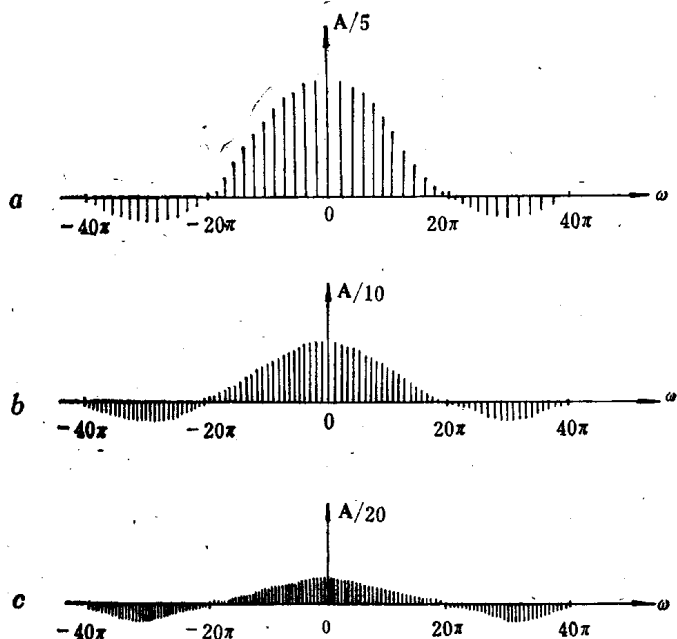
第3种情形: 假设 $d = \frac{1}{10}$, $T = 2$ 。这时基本频率更小 $\omega_0 = \pi$, 频率间隔 $\Delta\omega = \pi$ 。频谱为 $C_n = (A/20) \text{sinc}(n\pi/20)$ 。图形见图1.2c。

从本例看到, 当周期 T 增大时, 频谱 C_n 的谱线变密, 振幅减小。但频谱的形状不随周期 T 的变化而改变。

下面, 我们证明离散频谱的两个重要性质。

性质1 每个实周期函数的振幅谱是 n (或 $n\omega_0$) 的偶函数, 相位谱是 n (或 $n\omega_0$) 的奇函数。

证明: 根据



$$a \left\{ \begin{array}{l} d = \frac{1}{10}, \quad T = \frac{1}{2} \\ \omega_0 = \Delta\omega = 4\pi \end{array} \right. \quad b \left\{ \begin{array}{l} d = \frac{1}{10}, \quad T = 1 \\ \omega_0 = \Delta\omega = 2\pi \end{array} \right. \quad c \left\{ \begin{array}{l} d = \frac{1}{10}, \quad T = 2 \\ \omega_0 = \Delta\omega = \pi \end{array} \right.$$

图 1.2

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (1.9)$$

可得

$$C_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{+in\omega_0 t} dt \quad (1.10)$$

从 (1.9) 与 (1.10) 看到, C_n 与 C_{-n} 是复共轭的, 即 $C_n = C_{-n}^*$ 。于是有 $|C_n| = |C_{-n}|$, 因此 $|C_n|$ 是 n (或 $n\omega_0$) 的偶函数。

根据公式 (1.5), $\theta_n = \arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$, $\theta_{-n} = \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ 。于是有 $\theta_n = -\theta_{-n}$, 因此 θ_n 是 n (或 $n\omega_0$) 的奇函数。

性质2 当周期信号有时间移位时, 其振幅谱不变, 相位谱却发生变化。

证明 根据周期信号 $x(t)$ 的复数形式富里叶级数

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$$

当 $x(t)$ 移位时间 τ 时, 得到

$$\begin{aligned} x(t \pm \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0(t \pm \tau)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\pm in\omega_0 \tau} e^{in\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{C}_n e^{in\omega_0 t} \end{aligned}$$

其中 $\hat{C}_n = C_n e^{\pm in\omega_0 \tau}$, 我们将原始信号的频谱表示为 $C_n = |C_n| e^{i\theta_n}$ 。则移位时间 τ 后的频谱为

$$\hat{C}_n = |C_n| e^{i(\theta_n \pm n\omega_0 \tau)} \quad (1.13)$$

由此可见, 移位时间 τ 后的振幅谱与原始信号的振幅谱相同, 相位谱则发生 $\pm n\omega_0 \tau$ 弧度的变化。

2. 周期函数的功率谱

一个时间信号的功率常常代表它的一个重要特征。在此, 我们定义一个周期信号 $x(t)$ 的功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1.14)$$

公式(1.14)表示信号 $x(t)$ 在时间域 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 内的平均功率。对于信号 $x(t)$ 在频率域内功率的计算, 使我们建立起 $x(t)$ 的功率谱的概念。

根据周期信号 $x(t)$ 的复数形式富里叶级数

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t} \quad (1.15)$$

以及指数函数系 $\{e^{in\omega_0 t}\}$ 的完全正交性, 得到

$$\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \cdot T \quad (1.16)$$

或

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \quad (1.17)$$

从 (1.17) 式看到, 它右端的每一项 $|C_n|^2$, 代表了频率为 $n\omega_0$ 的谱分量所贡献的功率。这样一来, 只要计算出 $x(t)$ 在频率为 $n\omega_0$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) 的各谱分量的功率, 并将它们都加在一起, 就得到频率域内 $x(t)$ 的功率。因此, 我们定义周期信号 $x(t)$ 的功率谱为

$$|C_n|^2 \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.18)$$

例3 假设例1中 $A = 1$, $d = \frac{1}{20}$, $T = \frac{1}{4}$, 求该周期门函数

$x(t)$ 的功率。

根据公式 (1.6), 可求得此门函数 $x(t)$ 的频谱为

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt \\ &= \frac{Ad}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi d}{T}\right) = \frac{1}{5} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{5}\right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

根据 (1.19) 与 (1.18), 我们利用部分功率谱计算 $x(t)$ 的功率, 得到

$$\begin{aligned} P' &= |C_{-4}|^2 + |C_{-3}|^2 + |C_{-2}|^2 + |C_{-1}|^2 + |C_0|^2 + |C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 + |C_4|^2 \\ &= 2 \{ |C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 + |C_4|^2 \} + |C_0|^2 \\ &= \frac{2}{5^2} \left\{ \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right\} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \\ &= \frac{2}{5^2} \{ 0.875 + 0.756 + 0.255 + 0.055 \} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \\ &\approx 0.04 + 0.155 = 0.195 \end{aligned}$$

而根据公式 (1.14), 计算得 $x(t)$ 的总功率 P 为

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = 4 \int_{-1/40}^{1/40} 1^2 dt = 4 \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} \right) = 0.20$$

由此看到, P' 在总功率 P 中占 97.5%。

三、均方误差

假设 $\{\phi_i(t)\}$, ($i = 1, 2, \dots$) 是区间 $[t_1, t_2]$ 上的正交函数系, 即有

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ K_i & i = j \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (1.20)$$

并假定函数 $x(t)$ 可以按正交函数系 $\{\phi_i(t)\}$ 展成如下级数

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \phi_i(t) = C_1 \phi_1(t) + C_2 \phi_2(t) + \dots \\ + C_n \phi_n(t) + \dots \quad (1.21)$$

如果我们取 (1.21) 右端的前 n 项和来近似表示 $x(t)$, 则其均方误差为

$$MSE = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{i=1}^n C_i \phi_i(t) \right]^2 dt \quad (1.22)$$

将 (1.22) 右端积分中被积函数的平方展开, 经过计算得到

$$MSE = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[x^2(t) + C_1^2 \phi_1^2(t) + C_2^2 \phi_2^2(t) + \dots + \right. \\ \left. + C_n^2 \phi_n^2(t) - 2C_1 x(t) \phi_1(t) - 2C_2 x(t) \phi_2(t) - \dots - \right. \\ \left. - 2C_n x(t) \phi_n(t) \right] dt \\ = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt + C_1^2 K_1 + C_2^2 K_2 + \dots + C_n^2 K_n \right. \\ \left. - 2C_1 r_1 - 2C_2 r_2 - \dots - 2C_n r_n \right\} \quad (1.23)$$

其中

$$r_i = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi_i(t) dt \quad i = 1, 2, \dots, n$$

再利用 $C_i^2 K_i - 2 C_i r_i = (C_i \sqrt{K_i} - r_i / \sqrt{K_i})^2 - \frac{r_i^2}{K_i}$, 经过整理可将 (1.23) 式化为

$$MSE = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt + \sum_{i=1}^n (C_i \sqrt{K_i} - r_i / \sqrt{K_i})^2 - \sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{K_i} \right\} \quad (1.24)$$

从定义 (1.22) 看到, 均方误差 $MSE \geq 0$ 。再从 (1.24) 看到, 当 $C_i \sqrt{K_i} - r_i / \sqrt{K_i} = 0$, 或者

$$C_i = \frac{r_i}{K_i} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i^2(t) dt} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.25)$$

时, 均方误差 MSE 最小。而最小均方误差 MSE 为

$$MSE = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - [C_1^2 K_1 + C_2^2 K_2 + \dots + C_n^2 K_n] \right\} \quad (1.26)$$

例4 考虑如图1.3的周期为 2π 的方波 $x(t)$ 。

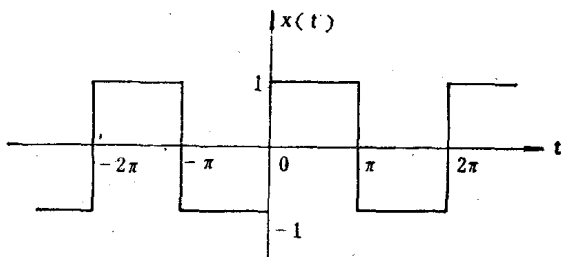


图 1.3

因为 $\{\sin nt\}$, $n = 1, 2, \dots$ 是区间 $[0, 2\pi]$ 上的正交函数系, 所以我们将 2π 为周期的函数 $x(t)$ 按正交函数系 $\{\sin nt\}$ 展开, 即展成富里叶级数

$$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \sin 2t + \dots C_n \sin nt + \dots \quad (1.27)$$

其中

$$C_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ 0 & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (1.28)$$

我们取 (1.27) 右端前 n 项和来近似表示 $x(t)$, 其均方误差 MSE 为

$$MSE = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} x^2(t) dt - C_1^2 K_1 - C_2^2 K_2 - \dots C_n^2 K_n \right\} \quad (1.29)$$

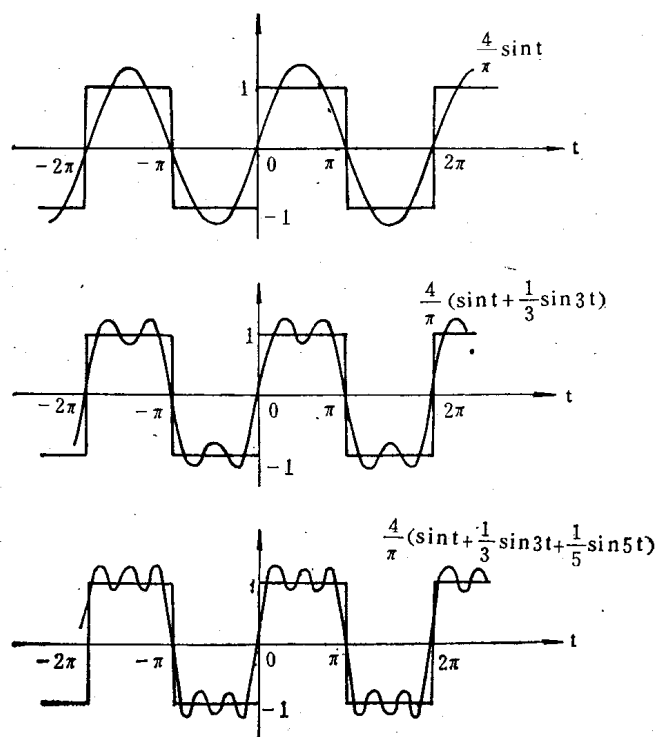


图 1.4