普通高等教育"十五"国家级规划教材

大学数学教程

概率论与数理统计

刘建亚 主编

吕 同 胡发胜 傅国华 编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学教程

概率论与数理统计

刘建亚　主编
吕同　胡发胜　傅国华　编

高等教育出版社

内容提要

大学数学教程是普通高等教育“十五”国家级规划教材，本书是其中的第四册，内容包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基本知识、参数估计和假设检验、一元线性回归分析和方差分析。

本书内容少而精，体现素质教育，突出数学思想，扩大了读者的知识面；与中学知识相衔接，易教易学；各节后的习题配置除基本练习外，还有部分综合练习题，本末附有习题答案；增添了利用计算机解决数学问题的内容，在每章后均有解决本章主要问题的 MATLAB 程序和例题演示。书后附有通用数学软件 MATLAB 简介并附有软盘。

本书可供非数学类专业的本科生作为教材使用。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/刘建亚主编．—北京：高等教育出版社，2003.7

大学数学教程

ISBN 7-04-011938-2

Ⅰ．概…　Ⅱ．①刘…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 045009 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	廊坊市科通印业有限公司		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2003 年 7 月第 1 版
印　　张	12.5	**印　　次**	2003 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	230 000	**定　　价**	15.60 元（含软盘）

大学数学教程
丛　书

前　言

为了适应新世纪我国高等教育迅速发展的形势和实行学分制的需要，满足新时期高等教育人才培养拓宽口径、增强适应性对数学教育的要求，山东大学数学与系统科学学院从2000年开始按照教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的精神和要求，在学院领导的亲自参与下，组织部分教师对非数学类专业大学数学的课程体系进行了认真深入的研究和论证。针对大学数学是高校非数学类专业所有大学生应当具有的素质，又考虑到不同专业的要求深浅不同、内容多少各异的实际情况，制订了适应这种情况的新课程体系。新课程体系的主要特点是采取平台加模块的结构，整个大学数学的课程共分三个平台，不同平台反映了不同专业对数学知识的不同层次、级别要求，体现数学知识结构和大学生认知结构的统一。鉴于人类认识是从感性到理性，由易到难，由浅入深的，因此第一平台（包括微积分（一）、线性代数和概率统计）是体现高等数学的普及和基础，体现所有各专业应当具有的数学素质教育，主要侧重基本概念和基本方法，加强基本运算，努力渗透基本数学思想；第二平台是对第一平台基本概念的加深和认识方法的拓宽，在本平台中还适当体现出数学理论的系统性和严谨性；第三平台（包括数学建模、数值分析、数理方程、复变函数和积分变换、运筹学等）则是为满足某些对数学知识和方法有特殊要求的专业而设置。各平台的教学内容由浅入深，反映不同专业对数学知识和内容的不同要求；各平台的内容又采取模块组合的方式，模块间相对独立，各专业亦可根据本专业的需要，选用不同的模块组合，这样就使得新的课程体系具有更大的灵活性，能够满足不同层次、不同要求的专业对数学教学的需求。另外，新课程体系还将利用计算机解决数学问题的数学实验融入其中，做到理论和实践的有机结合。

山东大学教务处对新课程体系给予充分的肯定，并大力支持按新课程体系编写相应的教材。在我们完成初稿之后，教务处安排几个专业的学生先行试用，并在此基础上加以修改完善。目前，已完成了前两个平台共计四册的教材编写和修改。其中，微积分为两册，分属两个平台；线性代数和概率统计各一册。其中《概率论与数理统计》这本教材还有以下特色：

1. 内容少而精，体现素质教育，突出数学思想。我们重点介绍概率论与数理统计中的基本概念和基本方法；从培养能力和提高素质为着眼点，有选择

地保留了部分定理、性质的证明，对那些用类似的技巧方法，或者读者举一反三可以理解或自学的证明部分作省略或简化处理。

2. 扩大了读者的知识面。我们将各专业不同需求的数学内容融进了一套教材中。主要的做法是：用“*”号标明不同层次对数学的要求；从不同的学科例题分析中引进基本概念；习题中也涉及多学科。如在数学要求较低专业学习的读者希望学习更多数学知识（如跨学科考研或工作需要）时，可以从同一本书按“*”号的标示获取。当然，教师在授课时可按本专业的要求有选择地使用。

3. 各节后的习题配置除基本练习外，还有部分综合练习题，以提高读者分析问题、解决问题的能力。综合练习题多置于每节习题后且配以“*”号标示。

4. 紧密联系实际问题，适当反映了统计方法在实际应用中的新进展。增添了利用计算机解决数学问题的内容，在每章后均有解决本章主题问题的 MATLAB 程序和例题演示，书后附有软盘。

本套书由山东大学数学与系统科学学院组织部分有较高水平和丰富教学经验的教师集体编写，最后聘请有关专家审定。在长达近两年的编写过程中，学院领导给予了极大的关注、支持和具体指导，为此曾多次召开各种类型的会议反复论证，几易手稿。

大学数学教程的主编是刘建亚，概率统计部分由吕同（第 1、2、3、4 章)、胡发胜（第 5、6、7 章）编写，由胡发胜完成修改及统稿工作；吴臻、刘锦萼审查定稿；各册的数学实验内容及所附教学软盘由傅国华编写和制作。

本套教材作为普通高等教育“十五”国家级规划教材正式出版，是教育改革的产物。在此，我们感谢山东大学教务处、山东大学出版基金委、山东大学数学学院领导对改革和教材出版的鼎力支持，感谢仪洪勋、江守礼教授对我们的鼓励和帮助。我们特别感谢高等教育出版社，由于他们的指导和帮助才使本书顺利与读者见面。

新时期大学数学的教学改革是一项非常紧迫，非常重要，也是非常艰巨的工作。限于编者水平，本书肯定会有许多不足和缺点乃至问题，恳请读者批评指正。

编　者

2002 年 11 月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

自然界和人类社会中出现的种种现象，大体上可分为两类：一类现象是在一定条件下必然发生或决不可能发生的，此类现象称为**确定性现象**．例如，在标准大气压下把水加热到 100 ℃时必然会沸腾；电流通过导线时，导线周围必然产生磁场，等等．另一类现象则不然，即在相同的条件下可能发生也可能不发生，或者说，可能出现这个结果也可能出现那个结果，呈现出偶然性，此类现象称为**随机现象**．例如，抛掷一枚硬币究竟是正面（国徽面）朝上还是反面朝上，在每次抛掷之前是无法判定的；观察用一种新药治疗某种疾病的疗效，对一个病人来说，可能有效也可能无效．通过大量试验我们知道：大量重复抛掷同一枚硬币时正面朝上的次数约占抛掷总数的一半．这类在个别观察试验中呈现不确定的结果，而在相同条件下，大量重复试验，试验结果呈现出的规律性称之为统计规律性．又如，为评价一种新药的疗效，通过足够多个病例的试用和观察，可以对其效果作出客观的估计．概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，它在自然科学、工程技术和社会科学的许多领域中有着重要的应用．特别是随着计算机的普及使用，概率统计在经济管理、金融保险、生物医药等方面的应用更加广泛、更加深入．

§1.1　随机事件及其运算

1. 随机试验与样本空间

为了确定随机现象的规律性，需要进行多次的试验、实验、调查或观察，我们把这些工作统称为试验．概率论中所说的试验是指随机试验，它具有下列三个特征：

1）试验可在相同的条件下重复进行；

2）试验的结果不止一个；

3）每次试验之前，不能判定哪一个结果将会出现．

例如，掷一颗骰子，观察出现的点数；记录某传呼台在一小时内接收到的呼唤次数；观察日光灯的使用寿命，以及前面提到的掷硬币试验等，都是随机试验，简称为试验，用 E 表示．

试验 E 中的每一个可能结果称为基本事件，或称为样本点，所有基本事件组成的集合称为试验 E 的样本空间，记为 Ω.

例 1.1.1 在抛掷一枚硬币试验中，有两个可能的结果：出现正面，出现反面. 若分别用“正”、“反”来表示，即有两个基本事件，这个试验的样本空间为 $\Omega=\{$正，反$\}$.

例 1.1.2 掷一颗骰子，观察其出现的点数，所有可能出现的结果有 6 个：出现 1 点，出现 2 点，…，出现 6 点. 分别用 1，2，…，6 表示，则样本空间为 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$.

例 1.1.3 在一批日光灯中任意抽取一只，测试其寿命，用 t（单位：小时）表示日光灯的使用寿命，则 t 可取所有非负实数：$t\geqslant 0$，对应了试验的所有可能结果，则样本空间为 $\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

由上述例题可以看出，样本空间应根据随机试验的内容来确定，这是很重要的.

2. 随机事件

随机试验 E 的样本空间 Ω 中的子集称为试验 E 的**随机事件**，简称为**事件**，常用大写英文字母 A，B，C，…等表示. 在例 1.1.2 中，基本事件 {出现 2 点}、{出现 4 点}、{出现 6 点} 以及由它们组成的集合“出现偶数点”，都是该试验的随机事件. 基本事件是最简单的随机事件，而一般的随机事件是由若干个基本事件组成的，称为**复合事件**.

随机事件中有两个极端的情况：一是由样本空间 Ω 中的所有元素组成的集合，称之为必然事件，用 Ω 来表示，它在每一次试验中都发生. 例如，前面所述“抛掷一颗骰子，出现点数都不大于 6”就是必然事件. 另一种是不含任何元素的空集合，称之为不可能事件，用 $\varnothing$ 来表示，例如“抛掷一颗骰子，出现点数大于 6”就是不可能事件. 它在每一次试验中都不会发生. 严格来说这两种事件不是随机事件，但为了今后讨论方便，我们还是把必然事件与不可能事件作为随机事件的特殊情形来统一处理.

3. 事件间的关系与运算

在同一随机试验中，事件不止一个. 有些事件简单，有些事件复杂. 通过研究它们之间的联系. 可以更好地帮助我们理解事件的本质.

设试验 E 的样本空间为 Ω；A，B，C，A_k（$k=1,2,3,\cdots$）是 E 的事件.

(1) **包含** 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含事件** A，或称事件 A **包含于事件** B **中**，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$，如图 1.1.1 所示（其

中，事件发生 A 和 B 发生分别表示样本点落在圆 A 和圆 B 内，下同）.

显然，必然事件 Ω 包含任何事件 A，事件 A 包含不可能事件 $\varnothing$，即 $\Omega \supset A \supset \varnothing$.

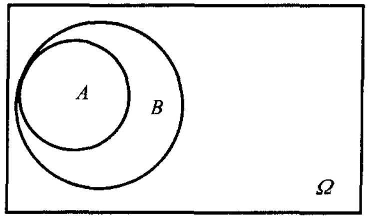

图 1.1.1

特别地，若事件 A 包含事件 B，且事件 B 也包含事件 A，即 $A \supset B$ 且 $A \subset B$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A = B$.

(2) **事件的并** 若事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这样构成的事件称为事件 A 与事件 B 的并事件（或称为 A 与 B 的和事件），记为 $A \cup B$. 例如，10 件产品中有 3 件次品，从中任取 2 件，若 A 表示“取到 1 件次品”，B 表示“取到 2 件次品”，则和事件 $A \cup B$ 表示“至少取到 1 件次品”.

事件 $A \cup B$ 通常包含三个部分：A 发生而 B 不发生；A 不发生而 B 发生；A，B 都发生. 如图 1.1.2 阴影部分所示.

类似地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的并事件 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 表示“A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生”.

(3) **事件的交** 由事件 A 与事件 B 同时发生而构成的事件称为事件 A 与事件 B 的**交事件**（或者称为 A 与 B 的积事件），记为 AB（或 $A \cap B$）. 如图 1.1.3 阴影部分所示.

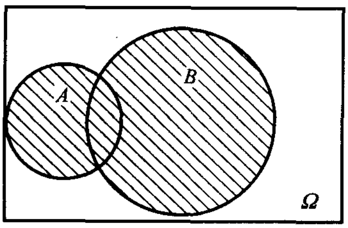

图 1.1.2

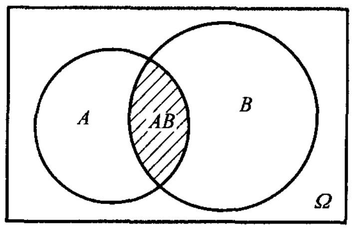

图 1.1.3

在上面“10 件产品中有 3 件次品”的例中，$A \cap B = \varnothing$；若用 C 表示“至多取到 2 件次品”，则 AC 表示“恰好取到 1 件次品”，即 $AC = A$.

类似地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的交事件 $A_1A_2\cdots A_n$ 表示“A_1，A_2，…，A_n 同时发生”.

(4) **事件的差** 事件 A 发生而事件 B 不发生，这样构成的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A - B$. 如图 1.1.4 阴影部分所示.

(5) **互不相容事件** 在一次试验中，若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$ 则称 A 与 B 为**互不相容事件**（或称为互斥事件）. 例如，掷一粒骰子，A 表示“出现 3 点”，B 表示“出现 4 点”，则 A 与 B 为互不相容事件. 如图 1.1.5.

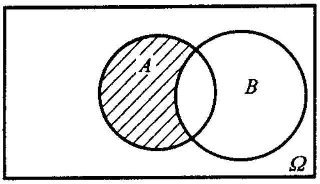

图 1.1.4

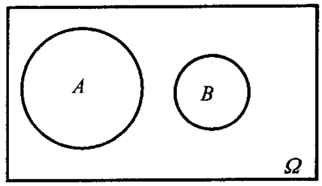

图 1.1.5

一般地，对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若它们之间两两互不相容，则称这 n 个事件是**互不相容**的. 通常 $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ 记为 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ 或 $\sum_{i=1}^{n} A_i$.

(6) **对立事件** 在一次试验中，若事件 A 与事件 B 二者必有一个发生且仅有一个发生，则称 A 与 B 为**对立事件**（或为互逆事件），通常把 A 的对立事件记为 $\bar{A}$（即 $B = \bar{A}$），$\bar{A}$ 也称为 A 的逆事件. 例如，掷一枚硬币，用 A 表示“出现国徽面”，而事件 B 表示“出现币值面”，则 A 与 B 为对立事件. 如图 1.1.6 所示.

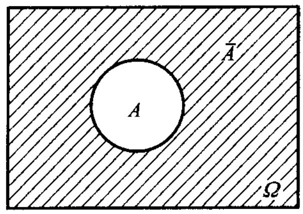

图 1.1.6

显然，$A\bar{A} = \varnothing$，且 $A \cup \bar{A} = \Omega$.

值得注意的是，若事件 A 与 B 对立，则事件 A 与事件 B 互不相容，反之不然.

概率论中事件间的关系和运算与集合论中集合间的关系形式上是类似的，利用在中学里学到的集合知识，可以更好地理解事件之间的关系（见表 1.1.1).

表 1.1.1

符号	概率论中	集合论中
Ω	必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
A	事件	子集
$\bar{A}$	A 的对立事件	余集
$A \cup B$	事件的并	并集
$A \cap B$	事件的交	交集
$A - B$	事件的差	差集
$A \cap B = \varnothing$	互不相容事件	A 与 B 没有公共元素

集合论中常用的运算律同样适用于概率论的事件的运算.

(1) **交换律** $A \cup B = B \cup A$,

$$A \cap B = B \cap A;$$

(2) **结合律** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) **分配律** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(4) **德摩根定律** $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n,$$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \cdots \cup \bar{A}_n.$$

例 1.1.4 设 A，B，C 表示任意三个随机事件，用 A，B，C 及其运算符号表示下列事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生；

(2) A 发生且 B 与 C 至少有一个发生；

(3) A 与 B 发生而 C 不发生；

(4) A，B，C 三个事件中只有一个发生；

(5) A，B，C 中至少有两个发生；

(6) A，B，C 中至多有一个发生.

解 (1)该事件可表示为 $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B \cup C)$；

(2) 因为 $B \cup C$ 表示 B 与 C 至少有一个发生，故该事件可表示为 $A \cap (B \cap C)$；

(3) A 与 B 发生即 A 和 B 都发生，就是 AB，C 不发生即 $\bar{C}$ 发生，故该事件可表示为 $AB\bar{C}$ 或 $AB-C$；

(4) 该事件为 $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$；

(5) 该事件为 $AB \cup BC \cup CA$；

(6) 该事件为 $\bar{A}\bar{B} \cup \bar{B}\bar{C} \cup \bar{C}\bar{A}$.

§ 1.2 随机事件的概率

研究随机现象，我们不仅需要知道它可能出现哪些事件，更需要知道每个事件出现的可能性的大小. 所谓事件的**概率**，就是刻画事件出现的可能性大小的一种数量指标，这个数量指标应满足以下两个要求：

(1) 它应是事件本身固有的，不随人们的意志而改变的一种客观属性量度.

(2) 它必须符合一般常情，即事件发生可能性大的，它的值就大；事件发

生可能性小的，它的值就小.

1. **频率与概率**

定义 1.2.1 设在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中事件 A 出现了 m 次，则称

$$f_n(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 出现的次数}}{\text{试验的总次数}} \tag{1.2.1}$$

为随机事件 A 在 n 次试验中出现的频率，m 称为频数.

由频率的定义，容易得出它具有下列基本性质：

$$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1;f_n(\Omega)=1 \quad (f_n(\varnothing)=0).$$

若 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_n).$$

事件的频率刻画了事件发生的频繁程度，由（1.2.1）式容易看出，频率越大，事件 A 发生越频繁，因而在一次试验中发生的可能性越大. 因此，我们自然会想到用事件 A 的频率表示 A 在一次试验中发生的可能性的大小. 但频率是随试验的具体结果而定的，一般不是确定的值.

应该指出，随机事件的频率与我们进行的试验有关，而随机事件的概率则是完全客观地存在着的，随机事件的频率 $f_n(A)$ 可以看作是它的概率的随机表现. 如：某人进行 n 次试验，A 发生的次数为 m 次. 另一人再进行 n 次相同的试验，则 A 发生的次数可能仍是 m 次，也可能不再是 m 次. 因此，频率总是对特定的 n 次试验而言的. 但经验证明，当试验的次数相当大时，频率总是稳定于某一常数附近，即它将以某一常数为中心作微小的摆动，而发生较大偏离的可能性很小. 这一性质称为**频率的稳定性**. 下面的例子说明了这一点.

例 1.2.1 掷一枚质地均匀的硬币，出现正面与反面的机会是相等的，即在大量重复试验中，出现正面的频率应接近于 0.5. 历史上曾有几位数学家做过该试验，结果见表 1.2.1.

表 1.2.1

试验者	掷硬币次数	正面朝上次数	频　率
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

例 1.2.2 瑞典 1935 年官方统计资料显示该年各个月份出生的男婴和女婴人数，以及生女的频率，见表 1.2.2.

表 1.2.2

月份	总　　数	男　　婴	女　　婴	生女频率
1	7 280	3 743	3 537	0.486
2	6 957	3 550	3 407	0.490
3	7 883	4 017	3 866	0.490
4	7 884	4 173	3 711	0.471
5	7 892	4 117	3 775	0.478
6	7 609	3 944	3 665	0.482
7	7 585	3 964	3 621	0.477
8	7 393	3 797	3 596	0.486
9	7 203	3 712	3 491	0.485
10	6 903	3 512	3 391	0.491
11	6 552	3 392	3 160	0.482
12	7 132	3 761	3 371	0.473
全年	88 273	45 682	42 591	0.482 5

由表 1.2.2 可以看出瑞典 1935 年各个月份生女频率在 0.482 5 这个数上下摆动.

上述事实表明：尽管在某一次试验中可能出现这种结果，也可能出现那种结果，但在大量试验中，只要试验条件相同，观察到的频率就基本上一致. 这说明随机事件在大量试验中存在着一种客观规律性，而频率稳定性正是这种规律性的表现. 频率稳定性是由大量统计得来的，所以也叫“统计规律性”. 它说明随机事件出现的可能性大小是事件本身固有的一种客观属性，因而，可以用频率的稳定值作为事件发生可能性大小的度量指标.

定义 1.2.2（概率的统计定义） 在大量重复试验中，若事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 的附近摆动，则称该常数 p 为事件 A 发生的概率，并记事件 A 的概率为 $P(A)$，即 $P(A)=p$.

应指出，频率是变动的，而概率则为常数. 当试验次数足够多时，频率相对稳定，可把频率作为概率的近似值，即 $f_n(A)\approx P(A)$. 通常工作中，我们所说的产品的合格率，彩票的中奖率，药物治疗某疾病的有效率都是指频率.

2. 古典概型

按照概率的统计定义去确定一个事件的概率，就得进行大量重复试验. 但是，在一些情况下，由于事件本身具有某种“对称性”，可直接计算其概率. 这类随机试验具有如下特点：

(1) 试验的样本空间中的样本点只有有限个，即基本事件的总数有限（有

限性)；

(2) 在每一次试验中，每个基本事件发生的可能性相等（等可能性）.

通常把具有上述特点的随机现象的数学模型称为古典概型，它在概率论发展史上首先被研究，古典概型概率的计算在产品质量抽样检查等实际问题中有重要的应用.

定义 1.2.3（概率的古典定义） **设试验结果共有 n 个基本事件 ω_1，ω_2，…，ω_n，而且这些事件发生的可能性相等. 事件 A 由其中的 m 个基本事件组成，则事件 A 的概率为**

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}(m)}{\text{基本事件总数}(n)}. \tag{1.2.2}$$

例 1.2.3 将一颗骰子掷两次，问出现点数之和等于 7 的概率是多少？

解 我们知道，两次掷骰子所有可能出现的点数共有 36 对，即基本事件总数 $n=36$. 而每一对出现的机会相等. 若记事件 A 为“点数之和等于 7”，它包含 (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) 共 6 对，根据概率的古典定义得

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

例 1.2.4 在 30 件产品中已知有 2 件次品，今从中任意抽取 3 件，求其中 (1) 恰有一件次品的概率；(2) 没有次品的概率.

解 (1)基本事件总数 $n=C_{30}^3$. 用 A 表示“恰有一件次品”这一事件，则 A 事件所包含的基本事件数可以这样计算：从 2 件次品中取得 1 件次品，共有 C_2^1 种取法；从 28 件正品中取得 2 件正品，共有 C_{28}^2种取法，因而 $m=C_2^1\cdot C_{28}^2$. 由概率的古典定义得

$$P(A)=\frac{C_2^1\cdot C_{28}^2}{C_{30}^3}\approx 0.186.$$

(2) 用 A_0 表示没有次品，事件 A_0 所包含的基本事件数 $m=C_{28}^3$，故

$$P(A_0)=\frac{C_{28}^3}{C_{30}^3}\approx 0.807.$$

例 1.2.5 某人的生日恰好是星期日的概率是多少？如果他出生之年的二月份有 28 天，问他的生日在五月份的概率是多少？

解 任何人的生日在一周中的星期数只能有 7 种，以这 7 种星期数为生日可以看成 7 个基本事件，“生日是星期日”是其中的一个基本事件，故“生日恰好是星期日”这一事件的概率是$\frac{1}{7}$.

一年有 12 个月份，但各月份的天数不尽相同，故以各个不同月份为生日

并非等可能，因此不能认为“生日在五月份”的概率为$\frac{1}{12}$. 他出生之年共 365 天，这 365 天构成所有的基本事件，故 $n=365$. 五月份有 31 天，故 $m=31$. 若用 A 表示“生日在五月份”这一事件，则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{31}{365}.$$

可见，按古典定义计算随机事件的概率时，首先要注意基本事件应具备等可能性. 另外，在分析计算构成样本空间的基本事件总数及事件 A 所包含的基本事件数时，既不要遗漏也不要重复.

3. 几何概率

古典概型的概率定义只适用于试验的可能结果是有限个，且具有等可能性的情况，因此有一定的局限性. 在实际问题中，我们经常会遇到样本空间中的样本点有无穷多的情况，若等可能的条件依旧成立，仿照古典概型的概率计算公式，就得到了几何概率的定义及其计算法.

定义 1.2.4　如果试验 E 的可能结果可以几何地表示为某区域 Ω 中的一个点（区域 Ω 可以是一维的，二维的，三维的，…），并且点落在 Ω 中某区域 A 的概率与 A 的测度（长度，面积，体积等）成正比，而与 A 的位置及形状无关，则随机点落在区域 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}=\frac{mA}{m\Omega}, \tag{1.2.3}$$

称（1.2.3）式定义的概率为几何概率.

例 1.2.6　在线段 $[0,\ 3]$ 上任投一点，求此点坐标小于 1 的概率.

解　当且仅当所投点落在区间 $[0,\ 1)$ 内时，此点坐标小于 1，而必然事件 Ω 就是区间 $[0,\ 3]$. 故按几何概率的定义立即可得所求概率

$$p=\frac{m\ [0,\ 1)}{m\ [0,\ 3]}=\frac{1}{3}.$$

例 1.2.7　向区间 $[0,\ 1]$ 上任意投两点，求此两点间距离小于$\frac{1}{2}$的概率.

解　以 x，y 分别表示两点的坐标，故

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

现在把（x，y）以平面直角坐标系上的点表示出现，则一切可能试验结果的集合 Ω 就是单位正方形. 如图 1.2.1 所示. 而“两点间距离小于$\frac{1}{2}$”，即 $|x-y|<\frac{1}{2}$，满足这条件的点（x，y）的集合是正方形中两条斜线中间的六边形（阴影部分），于是所求概率正是投点落在六边形中的概率