国家“九五”规划重点图书

混沌科学丛书
HUNDUN KEXUE CONGSHU

生命科学中的混沌

刘秉正 著

各种生物，特别是包括人类在内的灵长类动物，可以说是自然界中最复杂的系统，在其各种运动（变化）中出现混沌也就是很自然的事。对人体分析研究的有效手段是把它简化为多个子系统。这些子系统都具有很复杂的结构和内部相互作用，许多相互作用至今仍不十分清楚，无论从分子水平来看，还是从细胞或组织、器官水平来看，都是如此。

东北师范大学出版社

G J J W G H Z D T S

混沌科学丛书

社会现象中的混沌 12.00元
生命科学中的混沌 10.00元
光学中的混沌 14.50元
电学中的混沌 7.50元
地球物理中的混沌 6.00元
微观世界中的混沌 5.50元

ISBN 7-5602-2431-8
9 787560 224312 >

ISBN 7—5602—2431—8/Q·32
定价：10.00元

国家"九五"规划重点图书

生命科学中的混沌（修订版）

刘秉正 著

● 混沌科学丛书

东北师范大学出版社
中国·长春

（吉）新登字 12 号

图书在版编目(CIP)数据

生命科学中的混沌／刘秉正著．—长春：东北师范大学出版社，1999.10（2000.3 重印）
ISBN 7-5602-2431-8

Ⅰ．生…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．生物学－混沌－现象－研究－普及读物　Ⅳ．Q-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 55893 号

混沌科学丛书
●生命科学中的混沌
SHENGMINGKEXUE ZHONG DE HUNDUN
（修订版）

出 版 人　贾国祥
总 策 划　王忠山
著　　者　刘秉正
责任编辑　王忠山
封面设计　李冰彬
责任校对　方　军
责任印制　张允豪　栾喜湖

发　　行　东北师范大学出版社
地址：吉林省长春市人民大街 138 号
邮编：130024　电话：0431-5688470
传真：0431-5695744　5695734
网址：http://www.nenu.edu.cn
电子信箱：JGX@Public.cc.jl.cn
制　　版　东北师范大学出版社激光照排中心
印　　刷　吉林省吉新月历公司印刷分公司
版　　次　1999 年 10 月第 1 版　2000 年 3 月第 2 版
印　　次　2000 年 3 月第 2 次印刷
开　　本　850×1092 1/32　印张：7.625　字数：150 千
印　　数　5 001 册～7 000 册
书　　号　ISBN 7-5602-2431-8/Q·32
定　　价　10.00 元

前　言

非线性科学的崛起，特别是其中的混沌运动的发现，被喻为继量子理论和相对论创立后20世纪物理学的第三次大革命。由于自然界的各种活动规律和社会上各种活动规律绝大多数都是非线性的，线性只不过是这种非线性的某种近似，故此有关混沌的研究已经渗透到几乎是自然科学和社会科学的各个领域。

非线性系统的一种极为重要的运动形态就是混沌。各种生物，特别是包括人类在内的灵长目动物，可以说是自然界中最复杂的系统，在其各种运动（变化）中出现混沌也就是很自然的事，现已为大量事实和分析所证明。本书将着重介绍在生命科学中出现的非线性和混沌运动。

当然，生命科学包罗万象，姹紫嫣红，我们不可能在这本小册子里面面俱到地列举各种已经确认的混沌现象，而只能就一些典型事例加以分析介绍。

在本书编写过程中，作者曾得到王绍教授、胡志红同志和刘亦未同志的热情帮助，与他们进行过有益的讨论。作者在此对他们表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，对文献资料收集也受条件限制而

不很全面，成书也较为仓促，因此书中错误和不妥之处一定不少，诚恳地希望各位专家和读者批评指正。

刘秉正
1998年10月于东北师大

目　录

第一章　有关混沌的基础知识

近二三十年来，随着混沌理论的建立人们发现，混沌状态（混沌运动）广泛存在于许多自然现象和社会现象中。用这种新的关于混沌的理论和方法研究自然现象和社会现象已成为深入了解这些现象的实质进而加以利用的必不可少的工具。因此，在研究各种具体现象以前，我们有必要先就混沌的基础概念、基本特征及基本分析方法作简要的介绍。

§1.1　混沌的典型例子

任何客观的随时间变化的自然现象和社会现象都服从一定的客观规律，这些规律原则上应该可以用数学方程表述。当然，由于目前人们认识水平的限制，我们还远没有做到这一点。混沌状态的发现和确定，也是在分析一些具体数学方程解的过程中才明确的。为了搞清楚什么是混沌，我们先大致按照它的被发现和被确定的过程，介绍几个研究得比较多的典型的实例。

1. 混沌的发现——洛仑兹关于大气对流的模型

1963 年气象学家洛仑兹（E. N. Lorenz）在研究大气在地表受阳光照射变热或变冷而发生对流过程时，提出了以

下著名的简化方程组:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\
\dot{y} &= -xz + rx - y \\
\dot{z} &= xy - bz
\end{aligned}
\tag{1·1}
$$

式中 x、y 和 z 分别与对流强弱、对流引起的水平温差和垂直温差有关的变量,σ、r 和 b 分别与流体力学中的普兰多数、瑞利数和区域大小有关的参量。变量上面的"·"表示该变量对时间 t 的一阶导数。

洛仑兹方程(1·1)式中含有二次项 xz 和 xy,所以它是非线性的。对于非线性方程,除了其中极少数以外,一般都没有解析解。近数十年来,近似计算方法研究的进展,特别是计算机的发展,使得求非线性方程的数值解变得十分简易快速,从而使非线性方程(组)的解与线性方程(组)的解的巨大差异显露出来。洛仑兹就是在用计算机求解方程组(1·1)时发现,当方程中的参数取适当值时,其解出现了非周期的随机(stochastic)振荡。如令 $\sigma=10$、$b=8/3$、$r=28$ 时,用计算机很容易求得图 1 - 1 的振荡曲线。可以看出,此振荡与完全随机的噪声不完全一样,它似乎还有一点规律:无论时间多长,它都不会完全重复以前某时刻的振荡,即此时振荡具有非周期性和随机性。

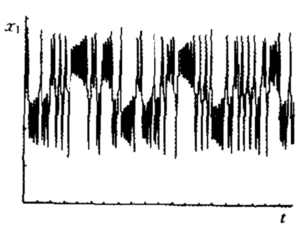

图 1 - 1　洛仑兹方程的解

$\sigma=10,\ b=8/3,\ r=28$。

人们常用状态变量 x、y 和 z 作为坐标画出方程的解在此空间(称为**状态空间**或**相空间**)的轨迹。图 1 - 2 就是

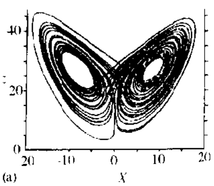

图 1 - 2　洛仑兹方程在相平面的

洛仑兹方程(1 · 1)式在三个不同相平面上投影的轨迹。可以看出,这些轨迹被限制在相平面(或相空间)的有限区域内,这样的有限区域称为运动系统的**吸引子**(attractor)。吸引子不随时间变化,其附近的轨道都要趋近于它。对于周期运动,吸引子是一简单的闭曲线。但是,像洛仑兹系统这样具有随机性的非周期运动,其吸引子绝不是什么复杂的闭曲线,其轨线往往是既折叠又相互交叉的密集的带。这种具有复杂结构(§1.2)的吸引子称为**奇怪吸引子**(strange attractor),以别于具有不动点(各变量都不变的所谓定态)和闭曲线(周期运动)那样的简单吸引子。这种具有随机性或奇怪吸引子的运动便是混沌。

2. 弹性系统的受迫振荡

继洛仑兹之后,又有一些人研究了某些方程出现随机解的现象。下面再以工程界讨论得比较热烈的弹性系统的受迫振动为例进行一下探讨。

大家都熟悉,弹性系统的胡克定律可表示为

$$f = -kx \tag{1 · 2}$$

它表示系统在离开平衡点的位移为 x 时所受到的恢复力 f 与位移成正比，方向与位移方向相反。由牛顿定律很容易得到此时系统的运动方程

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{1·3}$$

式中 $\omega^2 = k/m$，m 是系统的质量，变量上面的"··"表示该变量对 t 的二阶导数。方程(1·3)式的解为

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \tag{1·4}$$

式中 A 和 α 是由初始条件决定的积分常数，分别表示系统做简谐振动时的振幅和初位相。可见，在胡克定律(1·2)式成立的条件下，系统将做周期运动。

但是胡克定律(1·2)式只是一种近似，它只是某些系统在位移很小时才成立。在一般情形下，方程(1·2)式并不成立。一种较好的近似是把恢复力写成下面的形式：

$$f = -kx - cx^3 \tag{1·5}$$

相应的系统的运动方程为

$$\ddot{x} = -kx - \mu x^3 \tag{1·6}$$

此外，实际系统振动时总要受到阻尼作用。通常的阻尼力总是与速度有关，最简单的形式是与速度成正比，这时方程(1·6)式为下式所取代：

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx + \mu x^3 = 0 \tag{1·7}$$

式中 α 称为阻尼系数。(1·7)式就是有名的**杜芬**(Duffing)**方程**。此方程中含有非线性项 μx^3，因此它是非线性方程。

为了分析方便和一致起见，人们常把高阶微分方程化为一阶微分方程组来进行研究。为此，令

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

于是方程(1·7)变为以下一阶微分方程组:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_2 - kx_1 - \mu x_1^3 \end{aligned} \qquad (1 \cdot 8)$$

用同样方法也可以把更高阶微分方程化为一阶微分方程组:三阶微分方程化为三个变量的一阶微分方程组,四阶微分方程化为四个变量的一阶微分方程组,等等。

我们称刻画系统性质的状态变量个数(也就是一阶微分方程组中方程个数)为系统的自由度数,如力学中的一维运动是用一个二阶微分方程描述的具有两个自由度的系统,其两个状态变量就是位置(x)和其一阶导数(速度 $\dot{x}$ 或动量 $m\dot{x}$)。在一般情形下, n 个自由度的系统的演化(广义的运动)方程都可表示为

$$\dot{x}_i = f_i(x_j) \qquad i, j = 1, 2, \cdots n \qquad (1 \cdot 9)$$

上述方程组中每一方程表示每一状态变量随时间的演化规律。因此,不显含时间的方程(1·9)形式的方程组是表示系统状态变化规律的普遍的动力学(动态)方程,所以它们也称为**状态方程**,其中 n 是状态变量数,也就是系统的自由度数。

用计算机很容易求微分方程的数值解。为具体起见,令杜芬方程(1·7)式或(1·8)式中的参数取适当的确定值,如令$\alpha = 0.3$、$k = -1$、$\mu = 1$,则方程(1·7)式和(1·8)式分别为

$$\ddot{x} + 0.3\dot{x} - x + x^3 = 0 \qquad (1 \cdot 10)$$

和

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -0.3x_2 + x_1 - x_1^3 \end{aligned} \qquad (1 \cdot 11)$$

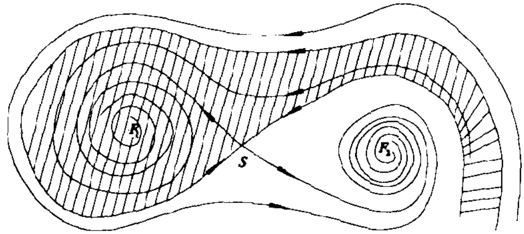

图 1 - 3　杜芬方程 $\ddot{x}+0.3\dot{x}-x+x^3=0$ 在相平面 $(x,\dot{x})$ 上的轨线和不同流域

图 1 - 3 是在相平面$(x_1, x_2,)$〔也就是相平面$(x, \dot{x})$〕上不同初始条件时解方程(1 · 10)式或(1 · 11)式得到的几条轨线。图中 F_1、F_2 和 S 都是令方程(1 · 11)式左边等于零得到的解,称为方程的**奇点**或系统的**定态**,它们相当于力学中的平衡点。易得它们的坐标为

$$\begin{aligned} F_1 \text{和} F_2: \quad & x_1 = \pm 1, x_2 = 0 \\ S: \quad & x_1 = x_2 = 0 \end{aligned} \tag{1 · 12}$$

进一步分析可知,在这些奇点当中,F_1 和 F_2 是稳定的,称为稳定焦点(参见刘秉正:《非线性动力学与混沌基础》§3,1994);S 是所谓**鞍点**,它是不稳定的。不同的初始条件的轨线被通过不稳定点 S 的轨线(称为分界线)分隔为两个区域:初始条件在图中阴影区的轨线最终都趋于左侧的稳定点 F_1,其余的初始条件的轨线则都趋于右侧的稳定点 F_2。这个例子的结果具有普遍意义:非线性方程往往具有不止一个定态,整个相空间(或相平面)可能被划分为不同**流域**(basin)或**吸引域**,不同流域中的轨线将趋于不同的稳

定定态或振荡状态，振荡状态一般都出现在不稳定态的周围。当然，也可能有些轨线要趋于无穷远，表示方程的解是发散的。

下面再来研究对上述杜芬方程施加一周期性外力时的运动。最简单的情形就是此外力是一余（正）弦力 $F\cos\Omega t$，其中 F 为外力的振幅，Ω 为其（圆）频率。这时方程（1 · 7）式变为

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx + \mu x^3 = F\cos\Omega t \qquad (1 \cdot 13)$$

可以把上述含时方程化为不显含时间的一阶方程（这样的方程称为**自治方程**）组。为此我们可以注意，余弦函数 $\cos\Omega t$ 是下述方程组的解：

$$\ddot{x} = -\Omega^2 x \qquad (1 \cdot 14)$$

而上式又可化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\Omega^2 y \\ \dot{y} &= x \end{aligned} \qquad (1 \cdot 15)$$

于是方程（1 · 13）式可化为下述一阶自治方程组：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - kx_1 - \mu x_1^3 + Fx_3 \\ \dot{x}_3 &= -\Omega^2 x_4 \\ \dot{x}_4 &= x_3 \end{aligned} \qquad (1 \cdot 16)$$

上式也表示受迫杜芬方程是一个自由度为 4 的系统。

一般的显含时间的方程都能很容易地化为自治方程。例如，设方程组（1 · 9）式中显含时间 t，这时只要令 $t = x_{n+1}$，把方程（1 · 9）式中显含的时间 t 换成 x_{n+1}，另外增加一个方程 $\dot{x}_{n+1} = 1$，这样方程组（1 · 9）式就变成不显含时间了。即含时的 n 个自由度系统可看成是自由度为

$n+1$的自治系统。

方程(1 · 13)式或(1 · 16)式也很容易在计算机上求得其数值解。例如,对方程(1 · 10)式或(1 · 11)式所表征的系统施加振幅 $F=0.4$、频率 $\Omega=1.2$ 的周期外力,此时系统的运动方程变为

$$\ddot{x}+0.3\dot{x}-x+x^3=0.4\cos 1.2t \tag{1 · 17}$$

或

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -0.3x_2+x_1-x_1^3+0.4x_3\\ \dot{x}_3 &= -1.44x_4\\ \dot{x}_4 &= x_3\end{aligned} \tag{1 · 18}$$

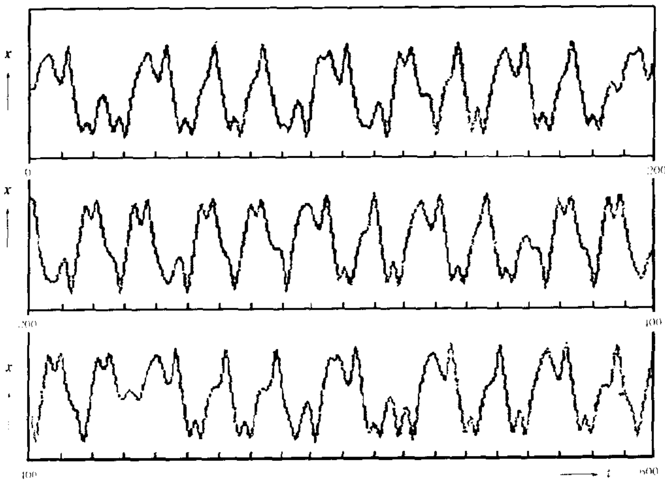

图 1 - 4　方程(1·17)式或(1·18)式的解

在计算机上求得上述方程的解如图 1 - 4 所示。可以看出,此图与图 1 - 1 类似:变量 x 处于振荡状态,其振荡似乎有些规则,但又具有随机性而是很不规则的。这种运动

也就是混沌。

3. 延迟方程

以上用微分方程表示系统各变量之间相互作用时，实际都隐含着假设：系统中的所有相互作用都是瞬时的，即都不需经历什么时间间隔或没有什么**时滞**(time lag)。但是，实际上有许多系统中的相互作用往往需要一段时间才能完成。考虑此时滞后，运动方程自然要修改，如方程(1·9)应改写为

$$\dot{x}_i = f[x_j(t-\tau_{ij})] \quad i,j = 1,2,\cdots n \tag{1·19}$$

式中 τ_{ij} 表示变量 x_j 对变量 x_i 作用的延迟量。(1·19)式称为**延迟方程**。

单变量的延迟方程可以看成是无穷阶的自治方程或多变量自治方程组，因为利用泰勒展开有

$$x(t-\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} x(t) = e^{\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} x(t) \tag{1·20}$$

因此，延迟方程的解自然可能与相应的非延迟方程的解完全不同，通常总是要复杂得多。举一个简单例子，考虑方程

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2\tau} x \tag{1·21}$$

很明显，此方程的解是随时间指数衰减的：

$$x = x_0 \exp\left(-\frac{\pi}{2\tau} t\right) \tag{1·22}$$

但是，如果是延迟方程

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2\tau} x(t-\tau) \tag{1·23}$$

其解却为