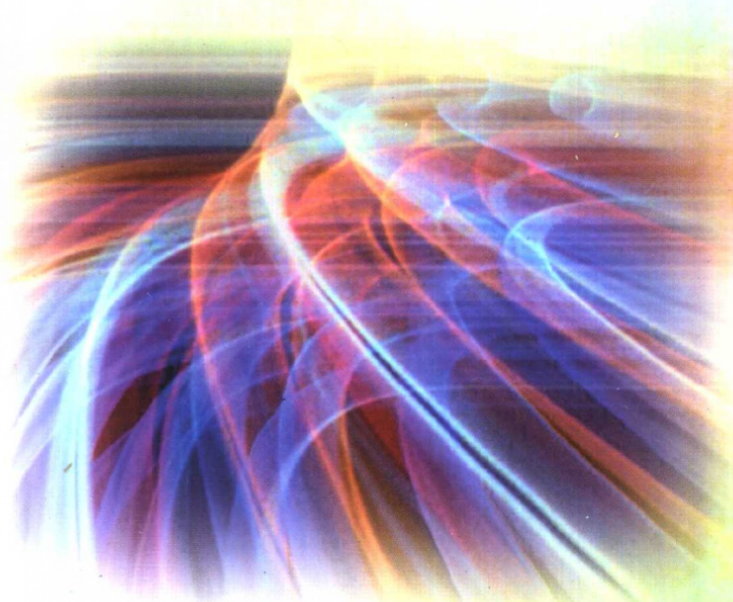


初中一年级

数学奥林匹克 中级读本

顾问 裘宗沪 主编 魏有德



四川大学出版社

数学奥林匹克中级读本

(第三版)



- 初中一年级
- 初中二年级
- 初中三年级

ISBN 7-5614-0240-6



9 787561 402405 >



ISBN 7-5614-0240-6/O · 41

定价: 11.40元

初中一年级

数学奥林匹克 中级读本

(第三版)

顾问 裴宗沪 魏有德 主编



四川大学出版社

2000年·成都

责任编辑:谭同余
责任校对:孙光琼
封面设计:冯先洁
责任印制:曹琳

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克中级读本. 初中一年级 / 魏有德主编.
3版. — 成都:四川大学出版社, 2000.6
ISBN 7-5614-0240-6

I. 数... II. 魏... III. 数学课—初中—教学参考
资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 33378 号

数学奥林匹克中级读本(第三版)

初中一年级

顾问 裘宗沪
主编 魏有德
出版 四川大学出版社
地址 成都市一环路南一段 24 号 (610065)
印刷 郫县犀浦印刷厂
发行 各地新华书店
开本 787 mm × 1 092 mm 1/32
印张 7.5
字数 178 千字
版次 2000 年 6 月第 3 版
印次 2003 年 8 月第 9 次印刷
印数 56 001 ~ 60 000 册
定价 11.40 元

◆ 读者邮购本书,请与本社发行科
联系。电话:85408408/85401670/
85408023 邮政编码:610065

◆ 本社图书如有印装质量问题,请
寄回印刷厂调换。

◆ 网址: www.scupress.com.cn

版权所有◆侵权必究

数学奥林匹克中级读本

第三版

初中一年级

顾问 裘宗沪 主编 魏有德

参加编写、修改人员(以笔画为序)

王美明 叶长春 安树纵 江相铭

吴 伟 何星樵 张建鹏 邹仁福

杨亦君 杨开理 段小龙 施为孝

唐德全 梁晋旭 喻贞踊 樊代兴

蓝家贵

统改 魏有德 校审 肖成勋

前 言

随着教育改革的深入发展,九年义务教育的实施,初中教学新大纲、新教材的颁发和初中数学课外活动、数学竞赛的新精神的贯彻,有必要重新为初中数学老师和学生提供一套适应新形势的课外活动辅导材料。经过几年的实践,第三版《数学奥林匹克中级读本》(下简称《三版中级读本》)在千禧之年与广大读者终于见面了。

在《三版中级读本》编写中,总体上我们强调了基础性,体现了时代性,突出了创造性,加强了实用性,增强了趣味性,扩大了开放性。不仅要使读者“学会”初中数学课内教材和基本数学竞赛知识,而且还要使读者在“会学”方面有所收益,掌握一些学习新知识、新本领的基本方法和技能,成为新时代的开拓者、创业者。

在《三版中级读本》编写中,具体体现了如下几条原则:

1. 不超“纲”

基础知识严格控制在义务教育大纲和新教材的范围内,并以巩固、提高和补充课内所学知识为主,辅以竞赛知识的讲解。读者只要把课内所学的内容学好,就可以顺利地学习这本教材,不需要补充其他知识。

2. 与课内严格同步

数学课外活动的开展必须与课内教学密切配合,才能既促进初中数学教学质量的提高,又使学生开阔视野,数学思想、方法得到培养。因此,我们这套教材严格与课内教学次序

同步,不需要超前学习后面知识和方法就可与课内教学同步阅读。

3. 大众化、普及型、少而精

“以普及为主,在普及基础上提高”、大众化、普及型是我们搞初中数学课外活动的基本原则。这套教材删去了过去“辅导讲座”中许多较深的内容,适当地降低了难度和要求,真正体现教材的大众化、普及型。既有利于中考,又适应竞赛要求。教师好辅导,学生容易自学和接受。

4. 多练悟要领

做练习是学习的一个重要环节。它既能达到巩固所学知识,又能从中学到新知识、新方法和技巧,培养学生的独立思维能力。我们这套书几乎在每讲的后面都配有适量的A、B两组练习。在一般情况下,A组以巩固、提高课内知识多些,是基本要求;B组涉及竞赛题多些,属于较高要求,老师和学生可根据实际情况选用。书末配有较详解答供参考。

在编写这套教材过程中,曾多次得到国内外著名数学普及工作者、中国数学会奥林匹克委员会副主席兼秘书长、原中国数学会普及工作委员会主任(现顾问)裴宗沪研究员的指教,在此我代表全体编者表示衷心感谢!

感谢曾支持、帮助过我们的同仁们、朋友们!在此致以崇高的敬意!

水平所限,编审中难免出现错误,恳请读者批评斧正!

魏有德 2000年3月

四川大学数学学院(邮政编码:610064)

目 录

一年级上期

第一讲	代数式	(1)
	附:归纳、猜想代数式方法简介	(10)
第二讲	有理数及其巧算	(13)
第三讲	绝对值和相反数	(22)
第四讲	整式的加减	(33)
	* * *	
第五讲	带字母系数的一元一次方程	(38)
第六讲	同解方程简介、 含绝对值的一元一次方程	(44)
	* * *	
第七讲	列方程解应用题(一)	(51)
第八讲	列方程解应用题(二)	(60)
第九讲	列方程解应用题(三)	(70)
	* * *	
第十讲	新运算	(77)

一年级下期

第十一讲	带字母系数的一次方程组	(83)
第十二讲	一次方程组的应用问题	(90)
第十三讲	非常规的一元一次不等式(组)	(97)
第十四讲	不等式(组)的简单应用	(103)

	* * *	
第十五讲	整式乘法.....	(110)
第十六讲	整式除法.....	(117)
	* * *	
第十七讲	线段、角	(125)
第十八讲	相交线和垂线.....	(136)
第十九讲	平行线.....	(140)
	* * *	
第二十讲	数的大小比较.....	(148)
第二十一讲	数的整除.....	(155)
第二十二讲	质数与合数.....	(164)
第二十三讲	质因数分解式的简单应用.....	(171)
第二十四讲	最大公约数与最小公倍数.....	(176)
第二十五讲	数的奇偶性及简单二色法.....	(182)
	* * *	
练习答案		(191)

一年级上期

第一讲 代数式

初中代数就是用字母表示数,并研究由这些字母、数和运算符号组成的式子(称为代数表示式,简称代数式)的数学问题.

一、列代数式

第一种情形 问题中已给出代表数的字母,只需我们运用所学过的数学知识用这些字母(为已知数了!)表示出所要求的量(为一个代数式).

例 1 (1)甲数为 a ,乙数为 b ,求甲、乙两数的平均数.

(2)甲、乙、丙三数的平均数是 a ,乙、丙二数的平均数是 b ,求甲数.

(3)一件工作,甲做 a 天可完成,乙做 b 天可完成,问甲、乙两人合做这件工作几天可完成?

解 (1)运用平均数概念知,甲、乙两数的平均数为 $\frac{a+b}{2}$.

(2)由平均数知识得

$$\text{甲} + \text{乙} + \text{丙} = 3a, \quad \text{乙} + \text{丙} = 2b$$

两式相减有 $\text{甲} = 3a - 2b$. 故甲数为 $3a - 2b$.

(3)由工程问题知,若设总工作量为 1,则甲每天可完成 $\frac{1}{a}$,乙每天可完成 $\frac{1}{b}$,两人合做每天可完成总工作量的 $\frac{1}{a} +$

$\frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$, 所以, 两人合做需要

$$1 \div \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1 \div \frac{a+b}{ab} = \frac{ab}{a+b} (\text{天}).$$

说明 代表数的字母, 在同一题目中, 不同的数要用不同的字母表示; 在不同题目中可以用同一字母表示不同的数, 例如, 字母 a 在例 1(1) 中表示甲数, 在(2)中又用来表示甲、乙、丙三数的平均数, 在(3)中又用来表示甲(人)做的天数.

第二种情形 题目中未给出代表数的字母, 需要自己假设代表数的字母, 然后再求代数式.

这种情形列代数式的基本步骤是:

(1) 选设(基本)量. 在题目涉及的众多量中, 确定一个或多个为基本量, 并用字母表示. 确定基本量的标准是: 用它(们)能较容易的表示出题中所涉及的其他量或数量关系.

(2) 用所设的字母表示题目中的其他相关量.

(3) 利用题中的关键词语(应用问题中则是已知结论)列出关系式即代数式.

例如, “甲数的 4 倍与乙数的一半的和”, 它的基本量是甲数、乙数, 我们可用 a, b 字母来分别表示它们; “甲数的 4 倍”、“乙数的一半”为其他相关量, 我们可用基本量 a, b 表示为 $4a, \frac{b}{2}$; 最后抓住关键词语“和”, 则“甲数的 4 倍与乙数的一半的和”的代数表示式为: $4a + \frac{b}{2}$, 其中 a, b 分别表示甲、乙数.

例 2 用代数式表示: 甲、乙两数的积与乙数的四分之一的差.

解 设 x, y 分别表示(基本量)甲、乙两数, 则所求的代数

式为 $xy - \frac{1}{4}y$. (相关量为 $xy, \frac{1}{4}y$, 关键词为“差”).

说明 用字母表示数相乘时, 中间可不写乘号, 如 $x \times y$ 可写成 xy ; 字母与数字相乘时, 数字应写在字母的前面, 并省略乘号, 如 y 与 $\frac{1}{4}$ 相乘, 不要写成 $y \frac{1}{4}$, 应写为 $\frac{1}{4}y$.

代数式可以表示用语言文字叙述的数值关系, 用代数式表示这种数值关系时, 要注意语言文字所叙述的运算是什么以及它们的顺序.

例 3 用代数式表示: 两数的平方和与另一数的差.

分析 设两数分别为 a, b , 另一数为 x . 此题中有三种运算: 平方、和、差, 其运算顺序是:

$$a^2, b^2 \rightarrow a^2 + b^2 \rightarrow a^2 + b^2 - x$$

解 如分析, 所求代数式为: $a^2 + b^2 - x$.

例 4 求图 1-1 中阴影部分的面积.

解法 1 设圆半径为 r . 阴影部分的面积 $S_{\text{阴影}}$ 等于梯形 $ABCO$ 的面积减去圆心角为 135° 的扇形面积, 因此,

$$\begin{aligned} S_{\text{阴影}} &= \frac{1}{2}(r + 2r) \times r - \frac{135}{360} \pi r^2 \\ &= \frac{3}{2}r^2 - \frac{3}{8}\pi r^2. \end{aligned}$$

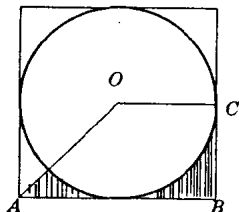


图 1-1

解法 2 设圆的直径(或正方形的边长)为 a , 则阴影部分的面积 $S_{\text{阴影}}$ 等于正方形面积与圆面积的差的 $\frac{3}{8}$ (为什么? 提示: 可由图形对称性来考虑), 所以,

$$S_{\text{阴影}} = [a^2 - \pi(\frac{a}{2})^2] \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}a^2 - \frac{3}{32}\pi a^2.$$

说明 (1) 设基本量用什么字母无关紧要(如解法 1 中设

半径为 r 或其他字母也可以),但选设哪个量为基本量却很重要,选设得好,就容易表出其他量,进而容易求出代数式,否则,不易求得.如何才能选设好基本量呢?这要根据题目内容,看选设的量能否较容易表示出题中的其它相关的数量.此例选设半径或正方形边长(即直径)为基本量,就较容易表示出相关数量:圆、扇形、梯形、正方形的面积,进而较容易求出所求的代数式.

(2)选设的基本量不一定是唯一的,因而所求的代数式的形式不一定是唯一的(虽然在实质上是一样的).

例5 火车从 A 城匀速地开往 B 城,经过4小时,一架飞机由 A 城飞往 B 城,它的速度是火车速度的7倍,并在 A, B 两城的中点处追上火车,求 A, B 两城间距离 s 的一个代数式(假设火车和飞机都是沿 A, B 城的连结直线上行驶).

分析 由于飞机的速度是火车速度的7倍,因此,若选设火车速度(为基本量)为每小时 v 千米,用它就可表示飞机速度为每小时 $7v$ 千米,飞机起飞时,它与火车相距 $4v$ 千米.这样,我们就可以根据运动问题基本公式:路程=速度 $\times$ 时间,及它的变形公式得到解法.

解 设火车速度为每小时 v 千米,则飞机的速度为每小时 $7v$ 千米,飞机起飞时,它与火车相距 $4v$ 千米,当它们都到 A, B 两城的中点时,飞机追上火车的飞行时间等于

距离差 $\div$ 飞机与火车的速度差(追及问题的计算公式)

$$= 4v \div (7v - v) = \frac{2}{3}(\text{小时}),$$

故 $\frac{s}{2} = 7v \times \frac{2}{3}$, 即 $s = \frac{28}{3}v$ 为所求.

说明 如果选设飞机的速度为 x ,则同样可得 s 的一个代

数式 $\frac{4}{3}x$.

二、代数式的值

代数式中字母代表它允许取的诸多数值(所以这些字母又叫变量). 当这些字母取特定的数值时, 其代数式就得到相应的数值.

例6 当 $x=0.5, y=2$ 时, 代数式 $\frac{4x+3y}{xy}$ 的值 = _____.

解 当 $x=0.5, y=2$ 时, $\frac{4x+3y}{xy} = \frac{4 \times 0.5 + 3 \times 2}{0.5 \times 2} = 8$.

例7 在整数 $0, 1, 2, \dots, 9$ 中, 质数有 x 个, 偶数有 y 个, 完全平方数有 z 个, 求代数式 $2x+y+3z$ 的值.

解 在 $0, 1, 2, \dots, 9$ 中, 质数有 $2, 3, 5, 7$ 四个, 故 $x=4$; 偶数有 $0, 2, 4, 6, 8$ 五个, 故 $y=5$; 完全平方数有 $0, 1, 4, 9$ 四个, 故 $z=4$, 因此代数式 $2x+y+3z=2 \times 4+5+3 \times 4=25$.

注: 完全平方数是指能写成 a^2 形式的数, 其中 a 为整数. 例如, $0=0^2, 1=1^2, 4=2^2, 9=3^2$. 则 $0, 1, 4, 9$ 为完全平方数.

例8 已知 $x=1\frac{7}{11}$, 求 $2(x-1)(11x-7)+3(x+\frac{4}{11})^3$ 的值.

解 由 $x=1\frac{7}{11}$ 知, $x-1=\frac{7}{11}, x+\frac{4}{11}=2$, 所以

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 2 \times \frac{7}{11} \times (11 \times 1\frac{7}{11} - 7) + 3 \times 2^3 \\ &= 2 \times \frac{7}{11} \times 11 + 3 \times 8 = 38.\end{aligned}$$

说明 这里用了一点技巧来求值, 先求出 $x-1=\frac{7}{11}, x+$

$\frac{4}{11}=2$. 当然,也可以如例 1 那样直接把 $x=1\frac{7}{11}$ 代入求值.

例 9 已知 $a-b=1, c-a=2$, 求 $(a-b)^3+(c-b)^3+(c-a)^3$ 的值.

分析 此题若要先从已知 $a-b=1, c-a=2$ 中求出 a, b, c 的值(然后再代入求代数式的值),是不可能的. 由观察知,只需求出 $c-b$ 的值就可求出要求的代数式的值.

解 根据等量加等量仍相等,可得(已知两式相加):

$(c-a)+(a-b)=2+1$ 即 $c-b=3$, 故所求的值等于

$$1^3+3^3+2^3=36.$$

例 10 已知 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{7}$, 求 $\frac{3x+y+z}{y}$ 的值.

分析 如例 9 的分析,已知条件只有两个独立等式,要从这两个已知等式分别求出 x, y, z 的值是不可能的. 这里我们采用“比值”转换的方法来求值.

解 令 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{7}=k$, 则 $x=3k, y=4k, z=7k$,

故
$$\frac{3x+y+z}{y}=\frac{3 \times 3k+4k+7k}{4k}=\frac{20k}{4k}=5.$$

求代数式值的方法除最基本的方法(直接代入法)外,例 8、例 9、例 10 分别介绍了其他一些方法:变形代入法(例 8),整体代入法(例 9),转换代入法(例 10). 求值的方法还很多,随着学习的深入,以后我们会逐步介绍.

三、简单的列方程举例

例 11 用代数式表示(或列方程)

(1)浓度为 63% 的酒精溶液 x 克,其中含纯酒精多少克?

含水多少克？

(2)有含盐 15% 的盐水 60 克，要配制含盐 40% 的盐水，应加盐多少克或蒸发掉多少克水？

分析 (1)在浓度问题中，必须掌握浓度计算公式： $\text{浓度} = \frac{\text{溶质质量}}{\text{溶液质量}}$ 。在酒精溶液中，纯酒精是溶质；在盐水中，盐水是溶液，纯盐是溶质。(2)在列方程解浓度问题时，以配制过程前与配制过程后的溶质相等为建立方程的依据。

解 (1)浓度为 63% 的酒精溶液 x 克中含纯酒精 $\frac{63}{100}x$ 克，含水 $(x - \frac{63}{100}x)$ 克。

(2)如果设加盐 x 克，则方程为

$$60 \times 15\% + x = (60 + x) \cdot 40\%.$$

如果设应蒸发掉水 y 克，则方程为

$$60 \times 15\% = (60 - y) \cdot 40\%.$$

同学们可以自己比较一下问题(2)中两个方程的异同。

例 12 列方程解应用题：某部队行军，步行 40 千米后，再乘车 3 小时，共行军 136 千米，这个部队乘车每小时行多少千米？

解 设部队乘车每小时行 x 千米，那么 3 小时计行 $3x$ 千米。据题意得方程 $40 + 3x = 136$ 。

解此方程有

$$3x = 96, \quad \text{故 } x = 32.$$

答：部队乘车每小时行 32 千米。

练习一

A 组

1. 用代数式表示:

- (1) 比 x 与 y 的积大 13 的数;
- (2) 比 a, b 两数的和的 2 倍小 c 的数;
- (3) a, b, c 三数的立方和减去 a, b, c 三数的积.

2. 设甲数为 x , 乙数为 y , 用代数式表示:

- (1) 甲数的立方与 3 的差除以乙数的商;
- (2) 甲、乙两数的立方差与甲、乙两数乘积的和;
- (3) 甲数的 4 倍与乙数的一半的和乘以甲数平方的 3 倍与乙数立方的差.

3. 填空:

- (1) a 公顷地每公顷产花生 m 千克, b 公顷地每公顷产花生 n 千克, 则两地共产花生____千克. 平均每公顷产花生____千克.
- (2) 有含盐 5% 的盐水 a 千克, 其中含纯盐____千克, 含水____千克; 若在这种盐水中加盐 b 千克, 这时盐水的浓度是_____.

4. 有一片稻田需要灌水, 单独用甲抽水机 a 小时可以灌完, 单独用乙抽水机 b 小时可以灌完, 用代数式填空:

- (1) 单独用甲抽水机, 1 小时完成任务的_____;
- (2) 单独用乙抽水机, 1 小时完成任务的_____;
- (3) 同时使用甲、乙抽水机, 1 小时完成任务的_____.

5. 四川成渝高等级公路长约 340 千米, 设汽车每小时行 v 千米, 用代数式填空:

- (1) 从成都到重庆需行____小时;
- (2) 如果每小时少行 3 千米, 需行____小时;
- (3) 如果每小时多行 10 千米, 可以提前____小时到达.

6. (1) 已知 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{25}$ 时, 求代数式