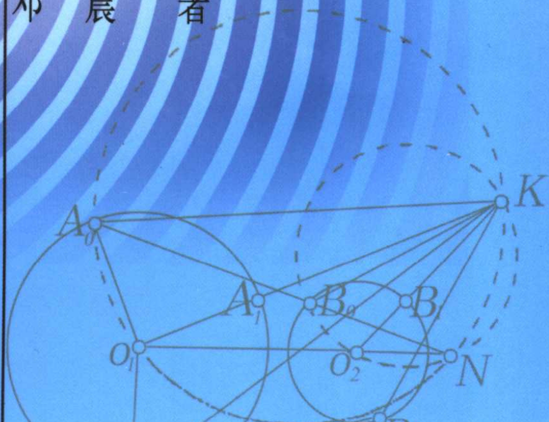
《数理天地》丛书　主编　周国镇

不动点

邓　震　著



气象出版社

《数理天地》丛书　主编　周国镇

不　动　点

邓　震　著

气象出版社

内 容 简 介

本书介绍了什么是“不动点”及用“不动点”解决一些初等数学问题(包括不少高考、竞赛问题)的思路和方法,从中体会利用新概念解决问题的快乐,体会“不动点”的神奇。

全书行文力求简练、有趣味,将知识性和科学性相结合,是一本激发学生求知欲的数学课外读物。

本书可供高中学生、数学爱好者和高中数学教师学习和参考。

图书在版编目(CIP)数据

不动点/邓震著.—北京:气象出版社,
2003.1
ISBN 7-5029-3497-9

Ⅰ.不… Ⅱ.邓… Ⅲ.不动点 Ⅳ.O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 094952 号

责任编辑:黄丽荣 终审:纪乃晋
封面设计:彭小秋 责任技编:刘祥玉 责任校对:庚 中

气象出版社出版发行
(北京市海淀区中关村南大街 46 号 邮政编码:100081 电话:68406961)
北京市京东印刷厂印刷
全国各地新华书店经销
开本:787×1092 1/32 印张:3.125 字数:70 千字
2003 年 1 月第一版 2003 年 1 月第一次印刷
印数:1～5000
ISBN 7-5029-3497-9/G・0997
定价:10.00 元

序

——读“不动点”有感

不动点的有关理论属于现代数学中比较艰深的部分，要将这样的内容写出来给中学生读，并且要让他们读了能懂，懂了又能用，这实在需要不凡的眼光、不凡的勇气和很好的数学功底，从前没有人做过，南平市高级中学副校长，特级教师邓震做了这件事，可敬可佩．

将高深数学中的一些基本思想和知识用深入浅出、通俗易懂的语言和形象生动的例子讲给中学生，以开阔他们的眼界，活跃他们的思维，让他们感受到科学的美，激励他们去探索未知的世界，去追求科学，这是造福青少年，功德无量的事．前苏联许多享誉世界的数学家和我国老一辈的数学家在这方面做了大量工作，他们的工作影响了几代人，培养了一大批科研力量，其重要性是很显然的．这样的普及工作，中学老师有责任做，也完全可以做，邓震老师正是做了这样的努力．现在的书店里，中学生读物名目之繁多，令人眼晕．但真正有很好内容的，实在是太少．这本《不动点》，薄薄一本，七万字而已，但是比起那些冠以什么“宝库”，“大全”，……之名而可读性又不敢恭维的书要有份量得多．当然，这本书也有不足，最主要的还是写得不够通俗，文字过于凝练，不过这对读者也是一个挑战，一个机会，只要边读、边算、边画、边思考，全书读下来，你会感到进入一个数学思维的新天地．同时还会以新的眼光看原来学过的知识．

周国镇

2002 年 8 月于北京

写在前面的话

在全面推进素质教育的今天，有关素质教育方面的读物很多，为中学生编写的数学类的相关书籍却为数有限．数学课外读物，既能帮助学生学好数学，扩大他们的知识领域，又能加深他们对数学基础知识的掌握，引导他们独立思考．因此，恰当地选择一些他们能够接受的、有利于开拓思维、有利于培养他们的科学素质和现代意识的知识介绍给他们是有益的．这本小册子讲的是“不动点”，它是现代数学中的一个名词，现代数学中不少分支都从不同的角度研究与此有关的问题．本书简单介绍“不动点”的概念，用“不动点”解决一些初等数学问题，以激发学生求知欲，启发他们的智慧和创造性，从而达到更高的数学境界．

本书在编写中，行文力求通俗、有趣味，将知识性和科学性相结合．前二节较易看懂，对于后面的几节，如果对某段或某个式子还不理解，不要急，要有耐心．读数学书时，要养成面前放张纸和一支笔的习惯，画画算算，这样就容易理解书中的内容了．读完后，你会发现书中解决问题的思想和方法与我们平时处理问题的方法有所不同，一定能体会到利用新概念解决问题的快乐，体会到“不动点”的神奇．近年来，在高中数学复习与高考试题也出现了一些以不动点为背景，与函数、数列、方程、不等式、解析几何巧妙结合，用以考察学生能力的题目．

在编写过程中，得到了数学教育专家，《数理天地》杂志主编，“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会主任周国镇先生的具体指导．《数理天地》杂志的编辑杨金龙先生校阅了全文，

并改画了几个图形，使之更清晰．在写作过程中，参考了不少书刊中的文章，限于篇幅，不能一一列举，在此一并表示深切的谢意．

由于本人水平有限，利用“不动点”解决初等数学中的问题还很多，本人研究的不深也不全面，书中不妥之处在所难免，敬请读者不吝指正．

邓　震

目　录

一、什么是不动点

取两根长短不一，有着同样刻度（但长度单位不同）的尺子（比如：一根长 5cm，一根长 5 寸），我们将其中较短的一根无论放在较长尺子的什么地方，只要短尺全部落在长尺内（图 1-1），则两根尺子总有某刻度，它们的数值是相同的（如图 1-1 中的“A”这一刻度），这个数值相同的刻度，就是这种移动变换下的一个不动点．

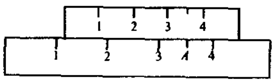


图 1-1

一根橡皮绳子上打着许多结，当你均匀拉伸后，对称地放在原来的位置下面，再把绳子相应的结用线连接起来，其中必有一条与橡皮绳垂直（图 1-2 中 A），则这条垂线的结点，便是橡皮绳在拉伸变换下的不动点．

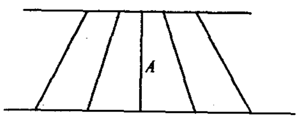


图 1-2

读者不难检验以上两个例子的正确性．下面我们再来看两个有趣的例子．

如果你手头有一个函数计算器，从某个数（比如 2）开始，然后反复按（cos）运算键，也就是：2→cos2→cos(cos2)→cos[cos(cos2)]→…，这时，计算器的显示屏上依次显示出下面结果：2 → 0.999390827 → 0.99984788 → 0.999847741 →

0.999847741→⋯，其第四步结果不再变化．这个过程实际上相当于求方程 $\cos x=x$ 的一个根 $x=0.999847741$，即函数 $f(x)=\cos x$的一个不动点．

取两张大小完全相同的地图，将其中一张随意揉成一团(不要揉破)，然后，随机地把它扔到另一张地图内(图 1-3(a))，则在纸团内至少有一地点，它恰好位于其底下地图与这一地点完全相同的地点的正上方(虽然无法说出这个地点的具体地名)．这个地点，便是地图在揉搓变换下的不动点．对这个事实，我们可以这样考虑，若纸团在下面地图上的正投影区域为 D(图 1-3(b))．显然，纸团上与区域 D 相对应的地区必位

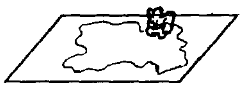


图 1-3(a)

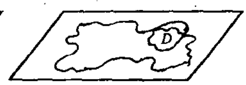


图 1-3(b)

于 D的正上方，设纸团里的这部分地区在下面地图上的正投影为区域 D_1，则 $D_1<D$，同样纸团内与 D_1 相对应的地区也一定位于 D_1 的正上方，若纸团里的这部分地区在下面地图上的正投影为 D_2，又有 $D_2<D_1$⋯如此反复下去，我们得到一连串的区域 $D,D_1,D_2\cdots,D_n\cdots$，且 $D>D_1>D_2>\cdots>D_n\cdots$，形成一个区域套，这个区域套，最后就缩至一个“点”(或“非常”小的区域)，则这个地点(或“非常”小的区域)在纸团里的位置，恰好在下面地图上同一地点的正上方．

“不动点”是一个重要的又十分有趣的数学概念．斯丕诺(Sperner)定理可以说是不动点在数学上有趣的应用：

把△ABC 任意分割成许多小三角形(图 1-4)，然后把△ABC 的顶点分别涂上三种不同的颜色，再把这些小三角形的顶点也涂上这三色之一．规则是：

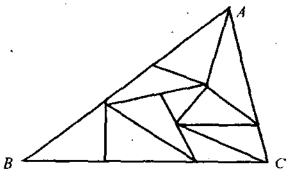


图 1-4

若小三角形的顶点落在$\triangle ABC$某条边上，则这个顶点，只能涂该边两端之一的颜色，若小三角形顶点落在$\triangle ABC$内，则可以任意涂三色之一．无论如何分割$\triangle ABC$，最后必有一个三角形（确切些，有奇数个小三角形）使它的三个顶点恰好涂有三种颜色．从不动点观念看，这个小三角形就是在“分割”、“着色”变换下的不动点．

历史上证明了 Sperner 定理后，导出了布劳韦尔(Brouwer)不动点定理：

“任意一个把n维球体变为自身的连续变换，至少有一个不动点”．定理的严格证明是艰深的．本书由于篇幅所限，不可能给出这个证明了，但是，我们可以看看布劳韦尔不动点定理最简单而又特殊的情况．

定理：设$f(x)$是连续函数，其定义域为$[0,1]$，值域$[0,1]$，则$f(x)$必有不动点（即存在一点$x_0\in[0,1]$使$f(x_0)=x_0$）．

这里说的连续函数，简单说来就是图像无间断的函数，如图 1-5 中的函数$y=f(x)$是连续函数，而函数$y=g(x)$就是不连续函数．在此，我们不能给出连续函数的严格定义，所以也不能给定理

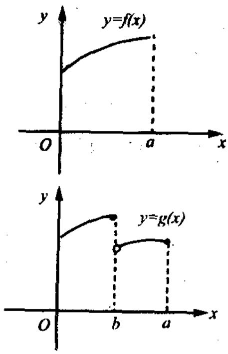


图 1-5

以严格的证明(读者可参考数学分析有关章节),但是我们可以用作图来说明定理的正确性.我们要说明 $f(x)$ 有不动点,实际上就是要证明方程 $f(x)=x$ 在区间 $[0,1]$ 上有解,也就是证明方程组 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=x \end{cases}$ 有解.

考虑在单位正方形 $OABC$ 中(图 1-6),只需证明函数 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 的图像必相交,事实上,因为当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $y=x$ 的图像是正方形 $OABC$ 的对角线 OB,而 $f(x)\in[0,1]$,

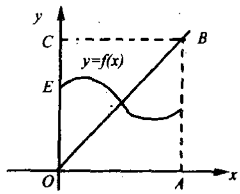


图 1-6

若 $f(0)=0$,或 $f(1)=1$,则 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 显然有交点(至少相交于 $(0,0)$ 或 $(1,1)$).

若 $f(0)\neq 0$,$f(1)\neq 1$,

因为 $f(0)$ 在 OC 上(即 E 在 OC 上),$f(1)$ 在 AB 上(即 F 在 AB 上),而 $f(x)$ 是连续函数,

所以 $y=f(x)$ 的图像必与对角线 OB 相交于 $P(x_0,f(x_0))$.

这就证明了结论.

人们形象地说拓朴学是橡皮膜上的几何学.我们可以用橡皮膜的收缩来说明抽象的不动点概念.设一块由橡皮膜做成的平面区域 Ω(图 1-7),收缩后成为 Ω 内部的一个小区域

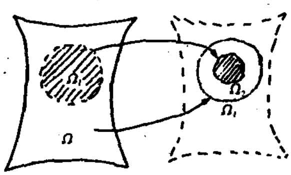


图 1-7

Ω_1：而原来平面的小区域 Ω_1，在收缩后成为 Ω_1 内部的一个小小区域 Ω_2：而原来平面的小小区域 Ω_2，在收缩后则成为 Ω_2 内部的一个更小的区域 Ω_3…这一系列区域所包含的公共点 P，便是在橡皮膜收缩后仍在原来位置的点，即为这种收缩变换下的不动点．

不动点理论，不仅在数学上有广泛的应用，在物理以及其他领域中也都有应用，18 世纪达朗贝尔利用不动点理论得到力学中的重要原理：

"刚体绕定点的任一运动，都可由它绕通过固定点的某轴线所作一个转动而得到".

一些自然现象也能用不动点理论来解释，如：

地球上任何时刻总可以找到一点，此时此刻这一点无风．缩到小范围，我们知道台风是热带海洋上的风暴，它是一团范围很大的旋转空气．台风中心风力达 12 级，这是指台风中心附近的风速每秒达 33 米，在如此凶猛的台风中心，由于外围空气旋转太快，空气不易进到里面去，所以那里面的空气几乎是不旋转，因而也无风，在这怒吼的台风中，果然存在一个风的不动点．

日本东京工业大学田中富教授在《科学之谜》一书中提到一件有趣的事：一位老师带领一批学生到寺庙里去参谒．当这位老师把头伸到一口大吊钟里去观察钟的结构时，一位淘气的学生就使劲地用撞木去撞钟，结果不但没吓着老师和钟旁边的同学，反而自己被震耳的钟声吓了一大跳．为什么会出现这个奇妙的现象？田中富教授画了一张图（图 1-8）解释说这与在一个

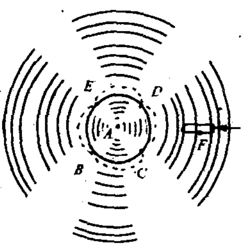


图 1-8

碗里盛满水，然后用筷子敲碗边，我们可以看到水波从碗周向碗中心移动，而水碗内水面的中心处水波却很小，敲钟的道理相同：图中 $ABCDE$ 实际上是声波的不动点．敲钟学生站在 F 点自然声音也就特别大．

"不动点"是现代数学中的有趣概念，现代数学中不少分支都从不同的角度研究与它有关的问题．一般对这一问题的研究分两个方面：

研究不动点"有无"问题叫做"不动点理论"．不动点理论虽然告知不动点的存在，却没说究竟在哪里，这个问题竟然困扰数学家达半个世纪，1967 年，美国耶鲁大学的斯卡弗教授，在不动点由未知转向已知方面取得重大突破，他提出了一种用有限点列逼近不动点的算法，使不动点的应用取得了一系列卓越的成果．

研究不动点个数问题，即"不动点类理论"．在这方面，我国数学家做出了出色的贡献，江泽涵教授所著《不动点类理论》就是研究这方面的拓扑学专著．当然拓扑学中所研究的是高度抽象的函数不动点，我们这里考虑的主要是如何利用不动点的概念解决一些我们熟悉的初等数学问题．

二、几何与不动点

取两张比例尺不同的同一地区地图，将小张地图随意地叠放在大张地图内，则小张地图 $A'B'C'D'$ 上有且只有一个地点 O 与下面大张地图 $ABCD$ 上同一地点正对着（图 2-1）. 这个 O 点就是地图在这种位置变换下的不动点，我们可以找到这个点：在图中，延长 $A'B'$、$B'C'$ 分别交直线 AB、BC 于 P、M，作⊙$AA'P$、⊙$BB'M$，因为 $\angle MB'P=\angle MBP=\mathrm{Rt}\angle$，所以 B'、P、B、M 四点共圆，所以⊙$BB'M$ 必过 P 点，所以这两圆在矩形 $A'B'C'D'$ 内的交点 O 就是该变换下的不动点.

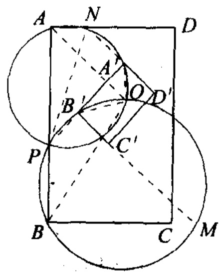


图 2-1

证明：连接 OA'，OB'，OA，OB

则 $\angle B'A'O=\angle PAO$（同弧 PO 上圆周角）

又 $\angle ABC=\angle A'B'C'=90°$

且 $\angle MB'O=\angle MBO$

所以 $\angle ABO=\angle A'B'O'$

故 $A'B'O'\backsim\triangle ABO$.

这就证明了 O 点在大小地图中所处的位置没有改变.

从图 2-1 中可知，⊙$BB'M$ 的直径为 PM，⊙$AA'P$ 的直径为 PN. 故本题作法可进一步改进，即延长 $A'B'$、$B'C'$、$D'A'$ 分别交 AB、BC、DA（或延长线）于 P、M、N，分别以 PM、PN 为直径作圆，这两圆的另一交点 O，即为该变换的不动点.

特殊地：当 $AB /\!/ A'B'$ 时，不动点 O 就是两矩形的位似中心，即连线 AA'、BB' 的交点 O（图 2-2(a)是位似图 2-2(b)是反位似）.

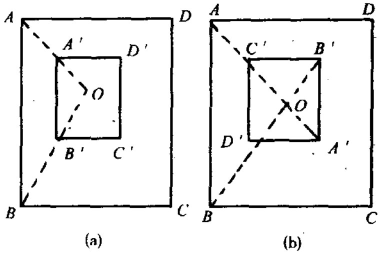


图 2-2

自然，代表同一地点的 O 是唯一的吗？回答是肯定的，假如在小地图 $A'B'C'D'$ 内有异于 O 的另一地点 O' 也代表着另一个相同的地点（图 2-3），则：

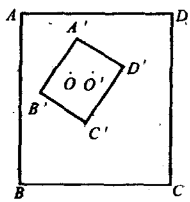


图 2-3

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OO'(\text{小地图上两地距离})}{OO'(\text{大地图上两地距离})}=1$$

所以　$AB=A'B'$

这与条件“比例不同，大小不一”相矛盾．故符合条件的不动点在此变换下有且只有一个．

从上面有趣的例子，我们得出相似的两图形其变化与不动点有一定的关系．几何中，我们如能发现某变化中的不动点，找到（或作出）不动点（定点），对分析和解决问题有什么意义呢？为说明这个问题，首先弄清楚几个概念．

一般地，平面中两个旋转方向相同的相似图形（$M\backsim M'$），可通过平移、旋转及相似（位似）这三种复合变换 f，使得 $f(M)=M'$，我们称变换 f 为线性变换．即 $f(Z)=aZ+$

b(a,b 为常数). 对于以上所述的三种变换,我们作如下解释:

平移变换:当平面上任一点 Z 变换到 Z',使得射线 ZZ' 有给定的方向;线段 ZZ' 有给定的长度,这种一个平面到它自身的变换称为平移变换。变换前后对应线段平行且相等,对应角的两边分别平行且方向一致. 在复平面上我们常用解析式 $g(Z)=Z+b$(其中 Z 为复数)表示,其几何意义是指在复平面上每一点 Z 的象 $g(Z)$ 都是将 Z 按向量 b 平移得到的.

旋转变换:将图形 F 绕定点 O 按一定方向旋转 θ 角得到另一个图形 F',这种由 F 到 F' 的变换称为旋转变换. 变换前后图形是全等的,且顶点排列顺序不变. 旋转中心 O 是旋转变换下唯一的不动点. 在复平面上,用 $g(Z)=Z(\cos\theta+i\sin\theta)=Ze^{i\theta}$ 来表示,其几何意义是复平面上每一点 Z 的象 $g(Z)$ 都是将 Z 绕着原点沿逆时针方向旋转 θ 角得到的.

相似变换:对平面中任意两点 A,B 及对应点的像 A',B',若总有 $A'B'=kAB(k>0)$,则该变换称为相似变换. 变换前后线段比保持不变,两直线夹角大小保持不变,图形形状保持不变. 复平面上用式子 $g(Z)=rZ$(r 为大于 0 的常数)表示,其几何意义是每一向量经过变换 g 后方向不变,但长度为原来的 r 倍. 至于位似变换是指,O 为平面上一定点,若对平面上异于 O 点的点 A,在 OA 所在直线上有点 A',满足 $\overrightarrow{OA'}:\overrightarrow{OA}=k\neq0$,它是相似变换的特殊情形,有关性质可参阅几何专著,我们这里就不去讨论了.

将上述三种最简单的变换连续进行,得到 $f(Z)=re^{i\theta}Z+b=aZ+b(a=re^{i\theta})$属于线性变换. 其主要性质是将直线变为直线,将圆周变为圆周. 显然,f 至多有一个不动点 K(为什么?可参阅第三节),使得 $f(K)=(K)$. 由于点 K 沟通了两相

似形 M 与 M' 的联系，我们在分析解决问题时先能注意到这个不动点，找到两相似图形间的关系，对解决问题是大有益处的．那么我们如何去寻找？找出了不动点，它对解题又有什么益处呢？下面我们就来研究这些问题．

若平面中旋转方向相同的两相似图形 M,M'（即 $M\backsim M'$），通过线性变换 f 使得 $f(M)=M'$，试求作一点 K，满足 $f(K)=K$（即作出不动点 K）．

作法：任取两对对应点 A、$B\in M$，A'、$B'\in M'$

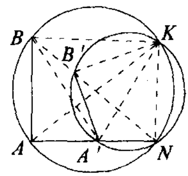


图 2-4

(1)若 AA' 与 BB' 相交，交点为 N，则分别作 $\triangle NAB$ 与 $\triangle NA'B'$ 的外接圆，它们的另一个交点 K 即为所求（图 2-4）．

(2)若 $AA'/\!/BB'$

①当 AB 与 $A'B'$ 相交时，交点即为 K 点．

②当 $AB/\!/A'B'$ 时，不动点不存在（或称 K 在无穷远点），此时为平移变换．

证明：因为 f 是线性变换，即 $f(Z)=aZ+b$（$a\neq 0$，a,b 为两固定复数，$Z\in C$），则 $\begin{cases}A'=Aa+b\\B'=Ba+b\end{cases}$ ⊛

A、B、A'、B' 均表示该点对应的复数．当 AA' 与 BB' 相交于 N 时，因为 $\angle BAK=\angle BNK=\angle B'A'K$ 及 $\angle BKA=\angle BNA=\angle B'KA'$

所以 $\triangle KAB\backsim\triangle KA'B'$，且旋转方向相同

所以 $$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{AB}}=\frac{\overrightarrow{A'K}}{\overrightarrow{A'B'}}$$

或用相应复数表示为 $\dfrac{K-A}{B-A}=\dfrac{K-A'}{B'-A'}$，