高等学校经济管理类数学基础

线性代数

主　编　孙国正　杜先能
副主编　蒋　威　侯为波　束立生

Xianxing daishu

安徽大学出版社

线性代数

高等学校经济管理类数学基础

线性代数

主　编　孙国正　杜先能
副主编　蒋　威　侯为波　束立生

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/孙国正,杜先能主编. - 合肥:安徽大学出版社,2003.8
(高等学校经济管理类数学基础)
ISBN 7 - 81052 - 704 - 5

Ⅰ.线... Ⅱ.①孙...②杜... Ⅲ.线性代数 - 高等学校 - 教材
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 073750 号

线性代数
(高等学校经济管理类数学基础)

主　编　孙国正　杜先能
副主编　蒋　威　侯为波　祝东进

出版发行	安徽大学出版社	**经　销**	各地新华书店
	(合肥市肥西路 3 号　邮编 230039)	**印　刷**	安徽省天歌印刷厂
联系电话	编辑室 0551 - 5108438	**开　本**	787×960　1/16
	发行部 0551 - 5107784	**印　张**	13
电子信箱	ahdxchps@mial.hf.ah.cn	**字　数**	240 千
责任编辑	徐建　鲍家全	**版　次**	2003 年 8 月第 1 版
封面设计	张　犇	**印　次**	2003 年 8 月第 1 次印刷

ISBN7 - 81052 - 704 - 5/O.37　　**定价** 15.50 元

如有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换

参 编 人 员

王良龙　孙国正　刘树德　束立生

何江宏　杜先能　宋寿柏　陆　斌

郭大伟　侯为波　祝东进　赵礼峰

胡舒合　徐建华　徐德璋　殷晓斌

蒋　威　雍锡琪

前　言

数学是最基础的科学，它是人类理性思维的基本形式.随着人类进入21世纪这个信息和知识经济时代，数学的基础作用越来越明显.数学教育的目标不仅在于为学生提供一种专业知识的传授，更重要的在于引导学生掌握一种科学的语言，学到一种理性思维的模式，为学生充分参与未来的竞争作好准备.

线性代数是大学数学的重要组成部分，其主要内容都是信息时代各类人才应该掌握的基本工具.

本书依据教育部《关于"十五"期间普通高等教育教材建设与改革的意见》的精神，同时参照2003，2004年《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，在编者多年教学实践的基础上编写而成.全书共分6章：前三章是行列式、矩阵、线性方程组.这3章始终贯穿线性方程组这条主线，在讨论线性方程组时引入 n 维向量的概念，并且介绍了他们的运算及线性关系等.第4章讨论了线性空间的基本内容，它作为 n 维向量空间的一般化，教师在教学过程中也可以仅就实 n 维向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 讲授.本章还介绍了线性空间的线性变换，以及在 $\boldsymbol{R}^n$ 中引入了内积的概念.第5章介绍了矩阵的特征值、特征向量、矩阵的相似及其对角化，这些都是矩阵最重要的内容.第6章介绍了二次型的理论，重点讨论实二次型以及用正交线性替换化二次型为标准型的问题.

本书体现了编者以下几方面的努力：

1. 针对线性代数概念多、结论多、比较抽象等特点，尽量从学生方面出发，力求运用简朴的语言描述问题、解释概念，通过例题的讲解，使抽象的概念具体化.

2. 结论的推证尽可能地使用最简洁、严谨的方法.

3. 针对线性代数解题方法"灵活多变，难以捉摸"的特点，尽量做到基本理论与解题技巧并重，重点放在基本解题方法的训练和归纳方面.

在本书的编写过程中，参阅了国内外许多教科书，在此恕不一一列出.

由于编者水平有限，本书的错误与缺陷在所难免，恳请同行、读者提出宝贵意见.

编者

2003年7月

目　录

第 1 章

行列式

在线性代数中，解线性方程组是一个基本的问题。行列式是研究线性方程组的一个重要工具，它是人们从解方程组的需要中建立起来的，它在数学本身及其它科学分支中都有广泛的应用，已成为近代数学和科技中不可缺少的工具之一.

§1.1　二、三阶行列式

1. 二阶行列式

我们用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

例 1　设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$，

问 λ 为何值时有(1) $D=0$；(2) $D\neq 0$.

解　$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda$，则 $\lambda^2-3\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=1$ 或 $\lambda=3$，故得

(1)$\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时 $D=0$；　(2) 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 3$ 时 $D\neq 0$.

2. 三阶行列式

我们用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，

称为三阶行列式,为方便记忆,可用图示表示:

$$\begin{array}{|ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

从二阶、三阶行列式可得到以下规律:

(1) 二阶行列式共两项,每一项都是取自不同行、不同列两元素的乘积,每一项前有一个符号,其中一正一负.

(2) 三阶行列式共有 $3! = 6$ 项,每一项均为取自不同行不同列的 3 个元素乘积,每一项前有一确定的符号,共有三个正项、三个负项.

根据二阶、三阶行列式定义可以类似地定义 n 阶行列式.

§1.2 n 阶行列式

为了定义 n 阶行列式,我们需要引入 n 阶排列的概念.

1. 排列与反序

定义 1.2.1 由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的不重复的每一种有确定次序排列,称为一个n 阶排列.

例如 1234 和 3142 都是 4 阶排列,15342 是一个 5 阶排列.

定义 1.2.2 在一个 n 阶排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中如果较大数 i_t 排在了较小数 i_s 之前,则称 i_t 与 i_s 构成了一个反序.一个 n 阶排列中反序的总数,称为该排列的反序数,记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的反序数 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是奇数的称为奇排列,是偶数的称为偶排列.

例如,排列 15342 中 5 排在 3,4,2 之前,故 5,3;5,4;5,2 分别构成反序,3,2;4,2 也分别构成反序,故共有 5 个反序,即 $\tau(15342) = 5$,所以 15342 是奇排列.

很显然 n 阶排列的总数共有 $n!$ 个.

例如,3 阶排列共有 6 个:123,231,312,132,213,321,其中前 3 个为偶排列,后三个为奇排例.

在一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中,如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对换,得另一排列 $i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$,这样的变换称为一个对换,记为$(i_s, i_t)$.

定理 1.2.1 任意一个排列经过一次对换改变奇偶性.

证明　(1) 首先讨论对换相邻两数码的情形. 设排列为 $AijB$, 其中 A, B 表示除 i, j 两个数码外其余的数码, 经过对换 (i,j), 变为排列 $AjiB$.

比较上面两排列中的反序数, 由于 A, B 中数码位置没有变动, 而且 i, j 与 A, B 中数码的次序也没有改变, 仅仅改变了 i 与 j 的次序. 因此新排列仅比原排列增加(当 $i<j$) 或减少(当 $i>j$) 一个反序, 故它们奇偶性相反.

(2) 在一般情形, 设排列为 $Aik_1k_2\cdots k_sjB$, 经过对换 (i,j) 变为 $Ajk_1\cdots k_siB$. 新排列可以由原排列中将数码 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $s+1$ 次相邻对换, 再将 j 依次与 $k_s,\cdots,k_2,k_1$ 作相邻对换, 故新排列可由原排列经 $2s+1$ 次相邻对换得到. 由(1) 知它改变了奇数次排列的奇偶性, 从而它与原排列的奇偶性相反.

定理 1.2.2　n 个数码 $(n>1)$ 的不同排列共有 $n!$ 个, 其中奇、偶排列各占一半.

证明　略.

2. n 阶行列式

定义 1.2.3　由 n^2 个元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为<u>n 阶行列式</u>, 其中横排称为行, 纵排称为列. 它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和. 各项符号是: 当该项元素行下标为自然顺序排列时, 若对应的列下标排列是偶排列时取正号, 奇排列时取负号, 故 n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可表为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{2.1}$$

通常用 D_n(或 D) 表示 n 阶行列式, 故

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{2.2}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 n 阶排列. 有时为方便起见也可简记为 $D_n=|a_{ij}|_{n\times n}$

例 1　计算 n 阶行列式的值.

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$,称其为下三角形行列式.

解 记 D_n 的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,$a_{1j_1}$ 取自第一行,当 $j_1\neq 1$ 时 $a_{1j_1}=0$,故 $j_1=1$,a_{2j_2} 取自第二行,该行中有 a_{21},a_{22} 可能不为零,而 a_{11} 与 a_{21} 在同一列,因此 $j_2=2$,这样一直推下去,可得 D_n 中只含一项不为0即 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,而 $\tau(12\cdots n)=0$,故

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可得上三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特殊情况

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

称为 n 阶对角形行列式,从左上角到右下角的对角线称为主对角线,其中元素称为主对角元.

定理 1.2.3 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 的一般项可以由下列式子表示

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 阶排列.

证明 略.

例 2 若 $(-1)^{\tau(i432k)+\tau(52j14)}a_{i5}a_{42}a_{3j}a_{21}a_{k4}$ 是 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 的一

项，则 i,j,k 应为何值，此时该项符号是什么？

解 由定义，$|a_{ij}|$ 中每一项元素取自不同行不同列，故 $j=3$ 且 $i=1$ 时，$k=5$ 或 $i=5$ 时 $k=1$.

当 $i=1,j=3,k=5$ 时，$\tau(14325)+\tau(52314)=9$，所以 $-a_{15}a_{42}a_{33}a_{21}a_{54}$ 为其中一项，符号为负.

当 $i=5,j=3,k=1$ 时 $\tau(54321)+\tau(52314)=16$，所以 $a_{55}a_{42}a_{33}a_{21}a_{14}$ 也为 $|a_{ij}|$ 中一项，符号为正.

§1.3 n 阶行列式的性质

将 n 阶行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的转置行列式，记为 D^T 或 D'. 即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad 则\ D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.3.1 将行列式转置，其值不变，即 $D^T=D$.

证明 记 D 的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2},a_{nj_n}$，它的元素在 D 中位于不同行不同列，因而在 D^T 中也位于不同行不同列，它在 D^T 中对应的项应为 $a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$，由定理 1.2.3 知该项前的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}+(-1)^{\tau(1,2\cdots n)}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，因此 D 与 D^T 是具有相同项的行列式，且每项符号相同. 故 $D^T=D$.

由上知，行列式中行所具有的性质，其列也具有相同的性质.

性质 1.3.2 交换行列式的两行(列)，行列式值变号.

证明 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \begin{matrix} \\ \\ \\ (i\ 行) \\ \\ (j\ 行) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

交换 D 的第 i 行与第 j 行得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix},$$

D 的每一项为

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}, \tag{3.1}$$

它取自 D 的不同行不同列,从而它也是 D_1 的一项;反之,D_1 中每一项也是 D 中的一项,并且 D 的不同项对应于 D_1 的不同项. 因此 D 与 D_1 含有相同的项.

(3.1) 式在 D 中的符号为 $(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$,而在 D_1 中是 D 的第 i 行与第 j 行互换而得到,而列的次序未变. $\tau(1\cdots j\cdots i\cdots n)$ 是一奇数,故(3.1) 在 D_1 中的符号为 $(-1)^{\tau(1\cdots j\cdots i\cdots n)}+(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)+1}$,即(3.1)在 D 与 D_1 中符号相反,从而 $D_1=-D$.

推论 1.3.1 若行列式中有两行(列) 对应元素相同,则值为零.

证明 将行列式 D 中具有相同元素的两行互换,结果仍为 D,由性质 1.3.2 知,新行列式应为 $-D$,故 $D=-D$,所以 $D=0$.

性质 1.3.3 用数 k 去乘行列式的一行(列) 所有元素等于以数 k 去乘该行列式.

证明 设把 D 的第 i 行元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 乘以 k 而得到行列式 D_1,则 D_1 的第 i 行元素是 $ka_{i1},ka_{i2},\cdots,ka_{in}$. D 的每一项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$,$D_1$ 中对应项可写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} = ka_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

而这两项前所具有的符号都是 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,因此 $D_1=kD$.

推论 1.3.2 一个行列式某行(列) 的所有元素有公因子,则公因子可提到行列式之外.

推论 1.3.3 如果一个行列式有一行(列) 的元素全部是零,则这个行列式值为零.

推论 1.3.4 如果一个行列式有两行(列) 对应元素成比例,则这个行列式值为零.

证明 可将这个行列式行(列) 的比例系数提到行列式之外,则余下行列式有两行(列) 对应元素相同,由推论 1.3.1 知该行列式值为零.

性质 1.3.4　设行列式 D 的第 i 行的所有元素都可以表示成两元素之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于两行列式之和,即 $D = D_1 + D_2$,其中 D_1 的第 i 行元素是 $b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{in}$,$D_2$ 的第 i 行元素是 $c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in}$,其他元素与 D 的相应位置元素都一致.

证明　D 的一般项

$$\begin{aligned} &(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &\quad + (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n}. \end{aligned}$$

上面等号右端第一项是 D_1 的一般项,第二项是 D_2 的一般项,所以 $D = D_1 + D_2$.

推论 1.3.5　若行列式某一行(列)的每一元素都是 m 个元素($m \geqslant 2$)的和,则此行列式可表成 m 个行列式之和.

性质 1.3.5　将行列式的某一行(列)的元素同乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置元素上,行列式值不变.

证明　设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\ 行 \\ \\ j\ 行 \\ \\ \\ \end{matrix},$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由性质 1.3.4 及推论 1.3.4 知

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= D + 0 = D.$$

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 2 + a_1 & 3 + a_1 \\ 1 + a_2 & 2 + a_2 & 3 + a_2 \\ 1 + a_3 & 2 + a_3 & 3 + a_3 \end{vmatrix}.$$

解 将第 1 列的 -1 倍分别加到第 2 列和第 3 列得

$$D = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & 2 \\ 1 + a_2 & 1 & 2 \\ 1 + a_3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 将各行都加到第 1 行，则第一行有公因子 $x + (n-1)a$，将其提到行列式之外得

$$D_n = [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix},$$

右边行列式将各行加上第一行的 $-a$ 倍得

$$D_n = [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].$$

例 3　设 3 阶行列式 $|a_{ij}| = a$,计算行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{12}-3a_{13} & -a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{22}-3a_{23} & -a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{32}-3a_{33} & -a_{33} \end{vmatrix}.$$

解　由行列式性质可先将第 1 列的公因子 4 及第 3 列的公因子 -1 提到行列式之外,然后再将行列式的第 3 列的 3 倍加到第 2 列,得

$$D_1 = 4\times(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -4\times 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= -8a.$$

例 4　求 n 阶行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & x_3 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

解　若 $a=0$ 或有一个 $x_i = a(i=1,2,\cdots,n)$ 时,显然容易计算.设 $a\neq 0$ 且 $x_i \neq a(i=1,2,\cdots,n)$,则可加边得:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1 & a & \cdots & a \\ 0 & a & x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x_1-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x_2-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\left[1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-a}\right].$$