SHIFANZHUANKESHIYONGJIAOCAI

师范专科试用教材

常微分方程

吉林教育出版社

师范专科试用教材

常 微 分 方 程

吉 林 教 育 出 版 社

师范专科试用教材 **常微分方程**

王奎实 杨德全 陈锡华 张德厚 编

责任编辑：王铁义 封面设计：王劲涛

出版：吉林教育出版社 787×1092毫米32开本 9.25印张 200,000字

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

发行：吉林省新华书店 印数：1—639册

统一书号：7375·659 定价：1.60元

印刷：长春市兴文印刷厂 ISBN 7-5383-0319-7/G·302

数学专科教材

编审委员会名单

师专数学教材出版说明

师范专科学校承担着培养大批合格的初中教师的重任。随着九年制义务教育的普及和四化建设的深入发展，师专的地位和作用愈来愈受到社会的重视。但是，就师专数学专业而言，到目前为止，国内还没有公开出版一套完整的、令人满意的专业教材，这给师专教学带来了一定的困难。为了解决这一问题，填补这一空白，在吉林省教育委员会的组织和资助下，由四平师院、吉林师院、长春师院、通化师院、白城师专、齐齐哈尔师院、廊坊师专、内蒙民族师院、昭盟蒙族师专等九所师范院校联合编写了这套教材。本套教材共有十四种，十五册。它们是：《空间解析几何》，《高等代数》，《数学分析》（上、下册），《概率论与数理统计》，《逻辑代数与计算机语言》，《普通物理》，《初等代数研究》，《初等几何研究》，《中学数学教材教法总论》，《高等几何》，《常微分方程》，《复变函数》，《高等数学》（物理专业用），《高等数学》（化学专业用）。

本套教材是根据国家教委制定的二年制师范专科学校的教学计划（征求意见稿）和各门课程的教学大纲并结合九所院校的教学实践编写的。为保证教学质量，邀请了东北师大、吉林大学等校的二十多位教授、专家、学者组成教材编审委员会，对全套教材的编写进行了具体指导和严格审查。

本套教材包括了教学计划规定的师专数学专业的全部专业课程（必修课及选修课）的教材以及物理和化学专业的高

等数学教材。编写时充分注意了各门教材内容上的衔接与配合，深度和广度方面的协调一致。并在文字使用、表达方式以及名词术语和符号的使用等方面有统一的要求，力争规范划一。

本套教材从培养目标出发，突出了师专教育的要求和特点。教材选择上避免了“多、深、尖”的弊病，体现了“少、广、新”的原则。力求培养学生具有坚实的理论基础和广阔的视野，以适应“三个面向”的需要。在表述方面，在充分注意科学性和严密性的前提下，力求通俗易懂，深入浅出，详尽透彻，易教易学。

为了加强对学生的能力培养和科学的思维方法的训练，各门教材都配备了较多的例题和习题。它们都经过精心选择，与正文内容密切配合，有些还是正文内容的补充和提高。对于难度较大的习题，作了适当的提示。

本套教材不仅可供师范专科学校使用，还可作为教育学院、职业大学、电视大学以及函授、刊授等相应专业的教材，亦可作为师范院校本科及其它院校有关专业的教学参考书。

编写一套完整的、适应四化建设需要的教材是一项十分艰巨的任务。我们的工作只是一个初步的尝试，缺点和谬误之处在所难免。诚恳希望得到有关专家和广大读者的批评指正。吉林省教育委员会和参加编写工作的九所院校的有关领导对于本套教材的编写出版给予了宝贵的支持，谨此表示衷心的感谢。

师专数学专业教材协编组

1986年10月

目　　录

第一章　绪　　论

许多科学技术问题常常归结为一个含有自变量、未知函数、及其导数（或微分）的关系式的求解．这种关系式称为微分方程．

本章将通过几个例子，介绍如何建立微分方程的问题，以及有关的一些最基本的概念．

§1　微分方程的实例

例 1　几何问题

已知曲线上任一点的切线的斜率，等于切点的横坐标的四分之一，求此曲线方程．

解　设所求的曲线方程为

$$y=y(x)$$

由导数的几何意义，曲线 $y=y(x)$ 在点 (x,y) 处切线的斜率为 $\frac{dy}{dx}$，根据假设可得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}x \tag{1.1}$$

这就是所要建立的微分方程．然后再由（1.1）求出 $y(x)$，问题就解决了．

例 2　自由落体

质量为 m 的物体，受重力的作用而自由落下，试建立物

体运动的微分方程．（不计空气阻力）．

解 建立坐标系 如图1.1．取铅垂线为坐标轴，规定向下为正向，并选取点O为质点运动的起点，质点的位置由$OM=s$确定．而s是时间a的函数．应用牛顿第二定律，由假设知$F=ma$，其中a为重力加速度g．根据二阶导数的力学意义

$$\frac{d^2s}{dt^2}=a$$

故得

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg$$

或

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g \qquad (1.2)$$

这就是所要建立的微分方程．

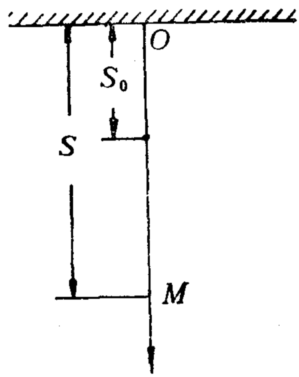

图 1.1

例 3 镭的裂变

镭是一种放射性物质．它的原子时刻都向外放射出氦原子以及其它射线，从而原子量减少，变成其它物质（如铅）．这样一定质量的镭，随着时间的变化，它的质量就会减少．已经发现其裂变速度（即单位时间裂变的质量）与它的剩余量成正比．试求镭的质量随时间的变化规律．

解 设t时刻镭的质量为

$$m=m(t)$$

t时刻镭的裂变速度，即质量对时间的变化率为$\frac{dm}{dt}$，由于裂变速度与剩余量成正比，故有

$$\frac{dm}{dt}=-km \qquad (1.3)$$

因放射性元素在裂变过程中，质量逐渐减少，质量变化率为负，故在上式右端加一个负号，（其中 $k>0$ 是比例系数，由实验测定）．这样就建立了放射性元素镭的裂变之微分方程。

例 4　人口估算

设 $y=y(t)$ 为某国家在时间 t 的人口总数。增长率为 $r=a-by$，其中正常数 a,b 称为生命系数，经测得 $a=0.029$；b 依赖于各国的社会经济条件。在无移民的情况下，试建立 $y(t)$ 应满足的微分方程。

解　因为 $y(t)$ 表示人口的总数，所以它是一个不连续的阶梯函数，为了应用微积分的方法，我们用一个光滑的函数近似地代替它，并把这个光滑的函数仍记为 $y(t)$。

人口总数 $y(t)$ 在时间 t 的变化率为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt}$$

由已知条件，人口的变化率 $\frac{dy}{dt}$ 等于人口总数 $y(t)$ 与其增长率 $a-by$ 的乘积，故有

$$\frac{dy}{dt}=(a-by)y \tag{1.4}$$

这就是所要建立的微分方程。

习　题　1.1

1．一条曲线通过点（1.0），且该曲线上任意点 $M(x,y)$ 处切线斜率为 x^2，求该曲线的方程。

2．如图 1.2 的 $R—L$ 电路，它包含电感 L，电阻 R 和电源 E。设 $t=0$ 时，电路中没有电流。

我们要建立：当开关 K 合上后，电流 I 应该满足的微分方程。这里假设 R、L、E 都是常数。

（提示：用基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律：在闭合回路中，所有支路上的电压降的代数和等于零）。

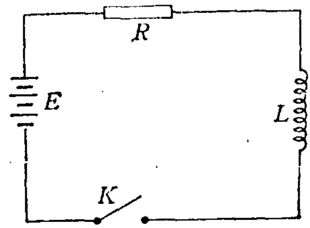

图 1.2

3．在 x,y 平面上，求具有以下性质的曲线：它上面任一点 $P(x,y)$ 的切线均和坐标原点到该点 P 的直线垂直。

§2 基本概念

定义 1.1 含有自变量、未知函数以及未知函数的导数（或微分）的等式，称为**微分方程**。

例如

$$\frac{dy}{dx}=4x^2-y \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+12xy=0 \tag{2.2}$$

$$\frac{dy}{dx}+\cos y+2x=0 \tag{2.3}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+3xy=\sin x \tag{2.4}$$

如果微分方程中出现的未知函数，只含一个自变量，则称这种方程为**常微分方程**。

例如　方程(2.1)——(2.4)都是常微分方程.

自变量的个数是两个或两个以上的微分方程，称为**偏微分方程**.

例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=4\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.6}$$

这里 u 和 T 是未知函数，x、y、z、t 都是自变量. 方程(2.5)含有三个自变量 x、y、z. 方程(2.6)含有两个自变量 x 和 t.

本书只研究常微分方程，为了叙述简单，今后把常微分方程简称为微分方程或方程.

在方程中未知函数的最高阶导数的阶数，称为**方程的阶**.

例如　方程(2.1)是一阶的，方程（2.2）和（2.4)是二阶的，(2.5）和（2.6）也是二阶的.

一般地 n 阶方程具有形式

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^n y}{dx^n}\right)=0 \tag{2.7}$$

其中 x 是自变量，y 是未知函数.

下面我们定义微分方程的解

定义 1.2　设函数 $y=y(x)$在 (a,b) 上有定义，且存在 n 阶导数，如果把 $y=y(x)$ 代入方程

$$F(x,y,y',\cdots y^{(n)})=0$$

得到在区间(a,b)上的恒等式

$$F(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x))\equiv 0$$

则称 $y=y(x)$为方程(2.7)，在(a,b)上的一个**解**.

如果由方程 $\varphi(x,y)=0$确定的隐函数 $y=y(x)$ 是(2.7)的解，则称 $\varphi(x,y)=0$ 为方程(2.7)的**隐式解**。

例如，一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

有显式解

$$y=\sqrt{1-x^2} \text{ 和} y=-\sqrt{1-x^2}$$

而关系式

$$x^2+y^2=1$$

就是其隐式解。

再如，一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}x$$

有解

$$y=\frac{x^2}{8}+C \tag{2.8}$$

其中 C 是任意常数。

二阶微分方程

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g$$

有解

$$S=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{2.9}$$

其中，C_1和C_2 是任意常数。

一般地，我们把 n 阶常微分方程的含有 n 个任意常数 C_1，C_2，…，C_n 的解

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

称为这个微分方程的**通解**．由隐式表示的通解称为**通积分**．这样（2.8）为$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}x$的通解，（2,9）为$\frac{d^2S}{dt^2}=g$的通解．

微分方程的通解中含有任意常数，因此它给出了微分方程的无穷多解．在实际问题中，常常要求我们去求微分方程的满足给定条件的一个解．这个条件称为**定解条件**．定解条件中比较重要的一种称为**初始条件**，它描述事物在初始时刻的状态．例如§1例3中，当$t=t_0$时，$m=m_0$就是初始条件，它指出在初始时刻，镭具有的质量为m_0．

一阶微分方程

$$y'=f(x,y)$$

的初始条件为

$$y(x_0)=y_0$$

二阶微分方程

$$y''=f(x,y,y')$$

的初始条件为

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0$$

n阶微分方程

$$y^{(n)}(x)=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

的初始条件为

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

这里$x_0,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)}$是给定的$n+1$个常数．

求解微分方程的满足初始条件的解的问题，称为**初值问题**（或**柯西问题**）．

例如，对于一阶微分方程来说，初值问题常记为

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

二阶微分方程的初值问题记为

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

n 阶微分方程的初值问题记为

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

例 求解初值问题

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{4}x \\ y(2) = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

解 由前面已知

$$y = \frac{x^2}{8} + C$$

是方程

$$y' = \frac{1}{4}x$$

的通解，现在的问题是要从中找出满足条件 $y(2) = \frac{5}{2}$ 的解。显然这时应选取 $C = 2$，即

$$y = \frac{x^2}{8} + 2$$

便是初值问题的解。因为

$$\left(\frac{x^2}{8} + 2\right)' \equiv \frac{1}{4}x,$$

$$\left(\frac{x^2}{8} + 2\right)\bigg|_{x=2} = \frac{2^2}{8} + 2 = \frac{5}{2}.$$

在通解中，当给任意常数以确定的数值时，所得到的某