



李永乐·李正元考研数学③

2005年版

数学

【数学一】

历年试题解析

主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元
中国人民大学 袁荫棠
策划 高 联



- 涵盖87-04试题
- 分析准确透彻
- 归纳解题思路
- 点拨命题考点
- 总结诀窍策略
- 预测05年趋势

国家行政学院出版社

013-44

119

:1



李永乐·李正元考研数学③ (2005 年版)

数 学 历 年 试 题 解 析

【数学一】

主编 北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

编者 (按姓氏笔画)

北	京	大	学	李正元		
清	华	大	学	李永乐		
北	京	大	学	刘西垣		
中	国	人	民	大	学	严 颖
北	京	大	学	范培华		
北	京	交	通	大	学	赵达夫
中	国	人	民	大	学	袁荫棠
空	军	雷	达	学	院	徐宝庆
东	北	财	经	大	学	龚兆仁
天	津	财	经	学	院	鹿立江

策划 高联

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学历年试题解析. 1/李永乐,李正元,袁荫棠主编.

-北京:国家行政学院出版社,2004

(考研系列)

ISBN 7-80140-322-3

I. 数… II. ①李… ②李… ③袁… III. 高等数学-研究生-入学考试-解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004374 号

数学历年试题解析(2005 年版)

[数学一]

李正元 李永乐 袁荫棠 主编

*

国家行政学院出版社出版发行

北京市海淀区长春桥路 6 号

邮政编码:100089

发行部电话:68920615

新华书店经销

北京市朝阳印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 开本 21 印张 540 千字

2004 年 2 月第 1 版 2004 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-80140-322-3/O·29 定价:28.00 元

研究过去 找出规律 认识现在 掌握重点 预测未来 轻取高分

(代前言)

(一)

当代著名数学家 G·D·伯克霍夫(Birkhoff)指出:“再也没有一个学科比数学更易于通过考试来测定智力了。”对于数学考试而言,试卷本身就是一份量表,它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶,是一份宝贵的资料。每一道试题,既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势,因此,对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌,便于广大考生了解有关试题和信息,从中发现规律,归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型,进一步把握考试的特点及命题的思路和规律,而且通过反复做历年试题,发现问题,找出差距,以便广大考生能及时查漏补缺,通过研究历年试题,也便于广大考生明确复习方向,从而从容应考,轻取高分。

(二)

本书汇集了1987年—2004年历届全国硕士研究生入学统考数学一试题,而且对所有试题均给出了详细解答,并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的,具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本套书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上,每题都给出了分析或评注,不仅对每题所考知识点或难点进行了分析,而且对各种题型的解法进行了归纳总结,使考生能举一反三,触类旁通;同时通过具体试题,指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误,并点评错因,使考生引以为戒。

本书把历年考研数学一试题依据考试大纲的顺序,按试题考查内容分章,这样与考生复习数学的顺序保持一致,便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写:

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例,便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起,并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到:该题型考过什么样的题目,是从哪个角度来命题的,并常与哪些知识点联系起来命题等等,从而掌握考研数学试题的广度和深度,做到复习时目标明确,心中有数。而且把历年同一内容的试题放在一起,我们可以发现近几年的考题中有许多与往年试题类似,因此研究往年的考题对我们准备下一年的研究生数学考试是不言而喻的。

另外,每种题型后附有**综述**——归纳总结该题型解题思路、方法和技巧,并举例说明。

(三)

著名数学家、教育家 G·波利亚(Polya)说:“解题是智力的特殊成就,而智力乃是人类的天赋。因此,解题可以认为是人的最富有特征性的活动。”本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时,应先看《数学考试大纲》,以便明确考试的有关要求,接着去认真阅读有关教材和参考书(推荐考生认真阅读由**国家行政学院出版社**出版、**李正元、李永乐、袁荫棠**等主编的《**考研数学复习全书**》(理工类),该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细,各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位,与考研命题思路极其吻合),复习完后,再来看本书的试题,以检验自己的水平。在看本书试题时,应该先自己动手做题,然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较,看哪些自己做对了,哪些自己做错了,为什么会做错,可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2—3遍,直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

关于考题重复的问题,需要说明的是:这种重复不仅在理工类和经济类内部,而且也在数学一至四之间重复。近年来多次出现过原来理工类试题拿到经济类中做考题的情况。这就是说,经济类考生也应该了解理工类试题。因此,建议经济类考生在阅读《**考研数学历年试题解析**》(数学三、四)的同时,参看《**考研数学历年试题解析**》(数学一、二)是十分必要的。



(四)

为帮助考生了解 1987—2004 年历年试题考点分布情况,我们统计了 1987—2004 年试题在各部分的每章所考过的题量、分数(详见本书第二篇),以便考生在备考中能有的放矢,把握重点,从而在考试中取得高分。

第一部分 高等数学

- 第一章 函数 极限 连续 共考过约 22 题,约 89 分;
- 第二章 一元函数微分学 共考过约 48 题,约 229 分;
- 第三章 一元函数积分学 共考过约 33 题,约 148 分;
- 第四章 常微分方程 共考过约 26 题,约 147 分;
- 第五章 向量代数与空间解析几何 共考过约 9 题,约 32 分;
- 第六章 多元函数微分学 共考过约 33 题,约 148 分;
- 第七章 多元函数积分学 共考过约 48 题,约 286 分;
- 第八章 级数 共考过约 36 题,约 191 分。

第二部分 线性代数

- 第一章 行列式 共考过约 9 题,约 37 分;
- 第二章 矩阵 共考过约 23 题,约 99 分;
- 第三章 向量 共考过约 15 题,约 65 分;
- 第四章 线性方程组 共考过约 15 题,约 82 分;
- 第五章 特征值与特征向量 共考过约 14 题,约 99 分;
- 第六章 二次型 共考过约 8 题,约 52 分。

第三部分 概率论与数理统计

- 第一章 随机事件和概率 共考过约 17 题,约 44 分;
- 第二章 随机变量及其概率分布 共考过约 12 题,约 49 分;
- 第三章 二维随机变量及其概率分布 共考过约 17 题,约 91 分;
- 第四章 随机变量的数字特征 共考过约 11 题,约 47 分;
- 第五章 大数定律和中心极限定理 共考过 1 题,3 分;
- 第六章 数理统计的基本概念 共考过 1 题,4 分;
- 第七章 参数估计与假设检验 共考过约 10 题,约 60 分。

(五)

本书由北京大学 李正元、清华大学 李永乐、中国人民大学 袁荫棠担任主编。参本书编写的有：清华大学 李永乐、北京大学 李正元、刘西垣、范培华、中国人民大学 袁荫棠、严颖、北京交通大学 赵达夫、东北财经大学 龚兆仁、天津财经学院 鹿立江、空军雷达学院 徐宝庆。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝考生复习顺利，心想事成，考研成功！

编者

2004 年 2 月

目 录

第一篇 历届数学一考研试题

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(2)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(5)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(9)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(12)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(15)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(18)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(22)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(26)
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(29)
1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(32)
1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(35)
1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(38)
1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(41)
1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(44)
1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(47)
1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(50)

第二篇 历届数学一考研试题分类解析

第一部分 高等数学	(54)
第一章 函数 极限 连续	(54)
第二章 一元函数微分学	(66)
第三章 一元函数积分学	(89)
第四章 常微分方程	(107)

第五章	向量代数与空间解析几何	(123)
第六章	多元函数微分学	(129)
第七章	多元函数积分学	(154)
第八章	级数	(199)
第二部分	线性代数	(227)
第一章	行列式	(227)
第二章	矩阵	(233)
第三章	向量	(246)
第四章	线性方程组	(255)
第五章	特征值与特征向量	(266)
第六章	二次型	(280)
第三部分	概率论与数理统计	(287)
第一章	随机事件和概率	(287)
第二章	随机变量及其概率分布	(294)
第三章	二维随机变量及其概率分布	(302)
第四章	随机变量的数字特征	(312)
第五章	大数定律和中心极限定理	(318)
第六章	数理统计的基本概念	(319)
第七章	参数估计与假设检验	(321)



第一篇 历届数学一考研试题

■ 编者按

历届考题就是最好的模拟试题。因为,这些试题是广大参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶,它既反映了《考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,展示出统考以来数学课考试的全貌,又蕴涵着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想和规律,是广大考生和教师了解、分析、研究全国硕士研究生入学统一考试最直接、最宝贵的第一手资料。因此,希望考生认真对待每年试题。

据统计,在最近3年的数学考题中就有30余道题是与往届考题相类似。比如:2004年数学一的第(5)小题与2003年数学二的第一大题第(6)小题,2004年数学一的第(20)题与2002年数学三的第九大题;2003年数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一的第一大题第(3)小题,2003年数学一的第三大题与2001年数学三的第六大题;2002年数学一的第一大题第(4)小题与1993年数学一的第七大题,2002年数学一的第一大题第(5)小题与1996年数学三的第十二大题及1989年第十大题的第(3)小题,2002年数学一的第五大题与1995年数学三的第六大题,2003年数学一第一大题的第(5)小题与2004年数学四第三大题的(23)题,2002年数学一的第十一大题与1994年数学四的第十一大题,……。

另外,2004年数学一试卷中有些试题与数学三试卷中的试题相同(尤其是概率与统计题)。

我们建议考生:

1. 刚开始复习时,不要去做套题,这样效果不佳。最佳方案是:首先,根据《考研数学大纲》的考核要求并结合较系统、权威的辅导教材(《数学复习全书》(理工类),李正元、李永乐、袁荫棠主编、国家行政学院出版社出版)及本书按章节进行系统、全面地复习,掌握考试大纲中的基本概念、公式和方法,然后做较经典、权威的数学模拟套题(《数学全真模拟经典400题》(理工类),李永乐、李正元、袁荫棠主编、国家行政学院出版社出版)及本书。
2. 请考生做套题时不要看后面的答案和解析,最好先测试一下自己的水平,按规定的时间做完,然后对照答案,给自己记分,通过对照来分析试题规律和自己的不足,以确定自己后阶段的复习方向和重点。
3. 请考生不要就题论题做题,而要通过对历年考题的比较以及对本书详尽解析中解题方法指导的把握,发现一些规律性的东西,使这些资料为我所用,从而提高自身数学水平,并轻松应对考试。

2004 年全国硕士研究生入学统一考试 数学一试题

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上.)

(1) 曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 1$ 垂直的切线方程为_____.

P 73, 16 题*

(2) 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$, 且 $f(1) = 0$, 则 $f(x) =$ _____.

P 92, 7 题

(3) 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分, 则曲线积分 $\int_L xdy - 2ydx$ 的值为_____.

P 167, 19 题

(4) 欧拉方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$ 的通解为_____.

P 113, 14 题

(5) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是

单位矩阵, 则 $|B| =$ _____.

P 230, 6 题

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{DX}\} =$ _____.

P 298, 8 题

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是

P 64, 22 题

(A) α, β, γ . (B) α, γ, β . (C) β, α, γ . (D) β, γ, α .

[]

(8) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

P 67, 4 题

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$.

[]

(9) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 下列结论中正确的是

P 205, 11 题

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$.

* P 73, 16 题 分别表示该题的解答在本书第 73 页, 第 16 题. 下同.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lambda$.

【 】

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于

P 96, 18 题

(A) $2f(2)$. (B) $f(2)$. (C) $-f(2)$. (D) 0.

【 】

(11) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为

P 240, 14 题

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

【 】

(12) 设 A, B 为满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

P 251, 10 题

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
 (B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.
 (C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
 (D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

【 】

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$. 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于

P 298, 9 题

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$.

【 】

(14) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0$. 令 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则

P 315, 11 题

(A) $\text{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$. (B) $\text{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2$.
 (C) $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$. (D) $D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2$.

【 】

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 12 分)

设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$.

P 80, 32 题

(16) (本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时, 为了减少滑行距离, 在触地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距

P 120, 24 题

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy,$

P 180.33 题

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛.

P 226, 37 题

设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

P 152,33 题

[illegible]

P 261.10 题

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似对角

P 277, 13 题

设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生,} \\ 0, & A \text{ 不发生;} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生,} \\ 0, & B \text{ 不发生.} \end{cases}$$

求:(I)二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;(II) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

P 304,6 题

设总体 X 的分布函数为
$$F(X; \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$$

其中未知参数 $\beta > 1$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 求:

(I) β 的矩估计量; (II) β 的最大似然估计量.

P 325.7 题

2003 年全国硕士研究生入学统一考试 数学一试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} =$ P 58, 10 题

(2) 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面的方程是 P 148, 29 题

(3) 设 $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ ($-\pi \leq x \leq \pi$), 则 $a_2 =$ P 220, 28 题

(4) 从 R^2 到基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为 P 254, 15 题

(5) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

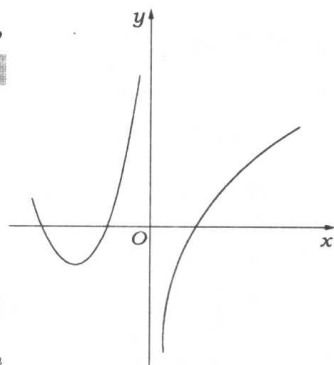
则 $P\{X + Y \leq 1\} =$ P 304, 5 题

(6) 已知一批零件的长度 X (单位: cm) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 从中随机地抽取 16 个零件, 得到长度的平均值为 40 (cm), 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 P 327, 10 题

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 $f(x)$ 有 P 76, 22 题

- (A) 一个极小值点和两个极大值点.
- (B) 两个极小值点和一个极大值点.
- (C) 两个极小值点和两个极大值点.
- (D) 三个极小值点和一个极大值点.



【 】

(2) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有 P 55, 3 题

- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.
- (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.
- (C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.
- (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

【 】

(3) 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$, 则 P 151, 32 题

- (A) 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点.
- (B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点.

(C) 点(0,0) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(D) 根据所给条件无法判断点(0,0) 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

【 】

(4) 设向量组 I : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II : $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则 P 251, 9 题

(A) 当 $r < s$ 时, 向量组 II 必线性相关. (B) 当 $r > s$ 时, 向量组 II 必线性相关.

(C) 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关. (D) 当 $r > s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

【 】

(5) 设有齐次线性方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$, 其中 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:

① 若 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解, 则秩(A) $\geq$ 秩(B);

② 若秩(A) $\geq$ 秩(B), 则 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解;

③ 若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则秩(A) = 秩(B);

④ 若秩(A) = 秩(B), 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

以上命题中正确的是

P 261, 9 题

(A) ①②.

(B) ①③.

(C) ②④.

(D) ③④.

【 】

(6) 设随机变量 $X \sim t(n)$ ($n > 1$), $Y = \frac{1}{X^2}$, 则

P 319, 1 题

(A) $Y \sim \chi^2(n)$.

(B) $Y \sim \chi^2(n-1)$.

(C) $Y \sim F(n, 1)$.

(D) $Y \sim F(1, n)$.

【 】

三、(本题满分 10 分)

过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D .

(1) 求 D 的面积 A ;

(2) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

P 103, 32 题

四、(本题满分 12 分)

将函数 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

P 219, 26 题

五、(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$, L 为 D 的正向边界. 试证:

$$(1) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx;$$

$$(2) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq 2\pi^2.$$

P 166, 18 题

六、(本题满分 10 分)

某建筑工程打地基时, 需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打, 都将克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 $k, k > 0$), 汽锤第一次击

打将桩打进地下 $a(m)$. 根据设计方案, 要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r(0 < r < 1)$. 问

- (1) 汽锤击打桩 3 次后, 可将桩打进地下多深?
 - (2) 若击打次数不限, 汽锤至多能将桩打进地下多深?
- (注: m 表示长度单位米.)

P 105, 34 题

七、(本题满分 12 分)

设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0$, $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

- (1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程;

- (2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

P 69, 9 题

八、(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t) = \frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}, \quad G(t) = \frac{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}{\int_{-t}^t f(x^2) dx},$$

其中 $\Omega(t) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$, $D(t) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq t^2\}$.

- (1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的单调性.

- (2) 证明当 $t > 0$ 时, $F(t) > \frac{2}{\pi}G(t)$.

P 197, 48 题

九、(本题满分 10 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = P^{-1}A^*P$, 求 $B + 2E$ 的特征值与特征向量, 其中

A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 3 阶单位矩阵

P 268, 6 题

十、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax + 2by + 3c = 0,$$

$$l_2: bx + 2cy + 3a = 0,$$

$$l_3: cx + 2ay + 3b = 0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

P 265, 15 题

十一、(本题满分 10 分)

已知甲、乙两箱中装有同种产品, 其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱中仅装有 3 件合

格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后, 求:

- (1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望;
- (2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

P 314, 10 题

十二、(本题满分 8 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta, \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 记 $\hat{\theta} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

- (1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$;
- (2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$;
- (3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量, 讨论它是否具有无偏性.

P 324, 6 题