

中小學生第二課堂活動
第二輯

数学

数学竞赛宫

——供初中三年级用



福建少年儿童出版社

中

数 学

(数学竞赛宫)

——供初中三年级用

丛书编写组

夏圣亭 执笔
夏 蕴 之

福建少年儿童出版社

1985年·福州

中小學生第二課堂活動叢書（第一輯）

數 學

（數學競賽宮）

——供初中三年級用

叢書編寫組

夏聖亭 執筆
蘊 之

*

福建少年兒童出版社出版

（福州得貴巷27號）

福建省科學書店發行

福建新華印刷廠印刷

開本787×1092毫米 1/32 6.875印張 132千字

1985年1月第1版

1985年1月第1次印刷

印數：1—63,820

書號：7367·26 定價：0.70元

编者的话

中小学生的第二课堂活动，是贯彻邓小平同志关于“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”的题词精神，进行教学改革的一个崭新课题。上海市和一些地方的师生走在头里了，而且取得了可喜的收获。我们特约请上海市部分中小学教师编写这套《中小学生第二课堂活动》丛书，为各地中小学校提供一套急需用的第二课堂活动材料。我们希望这套丛书对各地第二课堂活动的开展能起到积极的推动作用。

《中小学生第二课堂活动》丛书共三辑。现在和师生们见面的是其中的第一辑。本辑丛书以小学一年级到初中三年级的学生为活动对象，每一个年级一个分册，每个分册包括语文、数学、自然常识（小学）、自然科学（初中）各一册。全辑共二十七册。

第二课堂活动的目的，总的说是为了使中小学生学习必要的当代新科技知识，因而是第一课堂教学的必要的补充和扩大；而在当前，则应首先服务于第一课堂的教学，着眼于提高各科基础知识的教学质量，并适当地结合学习当代的新科技知识，从而为中小学生顺利进入更广泛、系统的第二课堂活动创造一定的条件。这就是我们编写这套丛书的指导思想。据此，本辑丛书具有以下三个特点：

一、充分突出“活动”二字，做到“寓教于乐”，打开

每一册语文、数学、自然常识活动丛书，首先跃入眼帘的是根据第二课堂活动的需要而设计的各项游艺、智能竞赛和自然探索等活动。这些活动生动活泼，内容丰富，形式多样，有助于激发和提高学生的学习积极性和自觉性，达到开发智力、扩大视界、培养创造能力、动手能力和自学能力的目的。

二、知识传授的针对性和启发性较强。各项活动力求针对大多数学生的水平，根据现行中小学校各科教学大纲的要求，紧扣课本教学中的要点、难点。在进行活动后，则进一步根据活动中可能存在的学习问题，有针对性地进行知识传授；力求避免知识传授的一般化。同时也强调知识传授的启发性，并在每场活动后向学生进行提问或提示，这些都将有利于教学质量的提高。

三、尽可能结合新科技知识的传授。不论是各年级的自然常识、自然科学还是语文、数学的活动和知识传授，都有意识地注意到了这一点，使各年级学生在可接受的范围内适当地学习和了解当代科技世界的一些新信息，为他们创造一定的条件，使之能较顺利地进入更广泛、系统的第二课堂活动。

此外，本丛书的编写也适当增加一点难度，以满足各类中小学和一部分学生对扩大知识面的要求。供初中学生使用的数学、自然科学各册，则适当减少游艺活动，增加趣谈、技巧研究、讲座、自我学习查验等内容。

这套丛书的编写和出版是个新的尝试，缺点在所难免，希望广大师生和读者提出宝贵意见，以便在再版时进行修订。

目 录

一、“未来世界”游记（推理竞赛）	（ 1 ）
二、强台风警报（直角坐标系）	（ 5 ）
三、你会研究问题吗	（ 8 ）
四、不可接近物体的高度	（ 12 ）
五、侦察（解三角形）	（ 15 ）
六、各种各样的证法（三角恒等式）	（ 18 ）
七、数学孙悟空（三角到代数的变换）	（ 21 ）
八、记忆的窍门	（ 24 ）
九、添辅助线的规律	（ 26 ）
十、抢答（如何添线）	（ 28 ）
十一、山神作证（反证法）	（ 31 ）
十二、调皮小球（几何计算）	（ 34 ）
十三、命题	（ 36 ）
十四、公路设计	（ 38 ）
十五、古题的启示（三角与几何）	（ 40 ）
十六、请你参加一次国际数学竞赛	（ 43 ）
十七、数学镜子（函数概念）	（ 45 ）
十八、观战（二次函数的解析式）	（ 49 ）
十九、最值计算器 MC	（ 54 ）

二十、谁的方法好（解不等式）	(58)
二十一、不空也不满（不等式应用）	(63)
二十二、非负数运算比赛	(65)
二十三、怎样寻找解题途径	(67)
二十四、上野清（因式分解）	(71)
二十五、判别式的妙用	(74)
二十六、马大哈的道理（分析法）	(78)
附录：1.自我检测	(83)
2.数学花园一角——几何种种	(88)
3.有趣的图论	(97)

参考答案	(102)
------------	-------

一、“未来世界”游记(推理竞赛)

同学们，今天你们进入初三年级学习后的第一场数学智能竞赛活动。大家对学习数学已经有了一些经验，这些经验中最重要的是提高分析问题，解决问题的能力。今天我们来一次分组竞赛，看看大家的分析能力如何。竞赛的问题来自“未来世界”游记，每题限时15分钟，至多延长10分钟，第一个回答正确的小组，若在限定时间内记10分，若在延长时间内则记5分，看哪一组的积分最高即为优胜。

1. 多少机器人？

“未来世界”里有许多与人一模一样的机器人，真人与机器人混在一起往往无法区分。我第一次去“未来世界”就参加了他们的一次集会，这次集会如果我不算在内，共有100个人参加，其中至少有9名是机器人，又知其中任何10人中至少有1个是真人。

你知道这100个人中有多少机器人吗？

2. 谁吹牛？

“未来世界”中的那次集会刚刚散去，我还没走上三步，就发现那里有四个人发生了争论，由于不知道他们的姓名，只好记为A、B、C、D。

A说B吹牛，B说C吹牛，C说D吹牛，D说A、B、C都吹牛。当我走上前去的时候，A、B、C、D就围住我，要我

给他们判明究竟谁吹牛，我仔细想了一想，才断定了他们之中谁是吹牛者。

你知道我是怎么判断的吗？

3. 听歌思索

在“未来世界”里游玩了几天以后，我才知道原来这个“未来世界”里的机器人全讲假话，只有真人才讲真话，于是我才明白上次遇到的A、B、C、D四个人中有真人也有机器人，显然你也已经知道了。

今天早晨我在“未来世界”中散步的时候，恰巧遇到一组人围坐成首尾相接的一圈在欢乐地歌唱，圈中间站着一人当指挥。我好奇地向他们每一个围坐着的人提一个同样的问题，除了指挥，因为当时我不好意思跨到圈内去。我的问题是：“你右边与你相邻的那个人是不是老实人？”但得到的回答全是：“不，不是老实人！”我又听了一回他们唱的歌，然后离开。我一边在“未来世界”里转游一边思索着，他们之中有几个是机器人？又有几个是真人？至于他们的人数，在听他们唱歌时数过一次，是47人，可是当时是否把指挥算进去却忘记了，于是我又转回去，不料他们已经走了，只有那个指挥还在那里整理东西，我急忙上去问他，他说他们总共有48人，说完他就走了。

请你们思索一下，我遇到的那些人中有几个真人？几个机器人？特别是那个指挥，到底是机器人还是真人？

4. 急诊

我第二次去“未来世界”的时候，记得那天晚上，我在

旅馆门口遇到一个自称为机器人的人也要登记住这个旅馆，我急忙告诉服务员那人毛病，于是我和几个服务员一起用电子汽车把他送进医院急诊，几秒钟后，医院的结论是病情不轻，需要住院治疗。

你想想，我怎么会知道那人有毛病呢？

5. 女记者

第二次到“未来世界”以后，我考察了将近三天才知道那个“未来世界”变得复杂了。

下面是我考察的结论。

“未来世界”里有许多与人一模一样的机器人，真人讲真话，并且没有任何二个真人是完全一模一样的，机器人讲假话，并且可能与任何别的人完全一模一样。但当真人精神不正常时就讲假话，而机器人不正常时则讲真话。

第四天我到“未来世界”的超级乐园里去玩，遇到两个完全一模一样的青年女子待在一起，她们都自称是电视广播公司的记者，当我向她们提出一个怪问题：“你们是否都正常？”时，其中左边一个女“记者”立刻笑着说：“我们都不正常。”我不免疑惑，就问右边一个：“这是真的吗？”她回答说：“当然不是真的！”

于是，我断定原先回答的那一个即左边一个“记者”必定是机器人，你们说我的判断对吗？

【提问或提示】 逻辑推理的一般过程可以分为两步：

1. 假设，每次假设一个方面的事实成立，但须将可能的

各个方面通过一次次假设考虑周全，不能有遗漏，这便是逻辑的严密性。

2.推理，从这个假设出发进行分析推理。

若推出矛盾，则推翻了这一假设，也证实了这一假设的反面成立，这便是反证法。

若推不出矛盾，则这一假设成立，接着再讨论其余方面的假设。

二、强台风警报(直角坐标系)

同学们，第二场数学智能竞赛进行的活动与直角坐标系有关。

广播电台正发出台风警报：

“今天上午北京时间11时，今年第17号强台风已经到达北纬 $23^{\circ}31'$ ，东经 $118^{\circ}59'$ 的海面上空，正以每小时13公里的速度向西北、偏北方向移动，…”。

厦门市正好在台风运动的方向上，如果以厦门市为原点，正东方向为 x 轴正向，1公里为单位建立直角坐标系，地球虽然是一个扁的椭球体，但由于地球的半径很大，局部范围内可以把它看作平面，因此，这样建立的坐标系 xoy 是平面直角坐标系。

气象报告上说的台风位置北纬 23.5° 、东经 119° 是一种球面坐标，把它转化成我们所建立的坐标系中的坐标为 $(91, -51)$ 。

问题1，现在是中午12时，请你们算算看，离台风在厦门登陆还有多少时间？

由于厦门市将受台风袭击，因此，这个问题的答案对于预防台风灾害将有十分重要的意义。

问题2，若有一只小船速度为每小时8公里，恰在台风方向上，当它返回厦门时，台风恰好在厦门登陆，那末当天

11时它在什么位置?

对于这两个问题要求做到计算迅速正确。

完成以后,我们一起按下面两个问题来小结一下:

问题3,大家已经知道利用平面直角坐标系来解决问题的方法称为坐标法,那么你刚才是如何运用它的呢?运用坐标法的步骤如何?

问题4,运用坐标法来解决这两个问题时你运用了哪些公式?这些公式你如何理解?

学习数学注意归纳小结是非常要紧的,因为只有经常归纳、善于归纳的人才能及时“消化”、及时“巩固”已学知识,可以说这也是学习上的诀窍之一。

从小结中可以看出坐标法的特点是把有关问题转化为有关点的坐标的数量关系来解决。因此,只要有关问题能用点的坐标及其数量关系来描述就可以用坐标法,上面的强台风警报就是一例。上学期开始学习的平面几何也是关于点和线的问题,因此,从理论上讲,几何问题都可以用坐标方法来解决。有时比纯粹运用几何方法更为简便,不信?我们可以来试一试。

问题5, $ABCD$ 为梯形, $AD \parallel BC$, 求证

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC$$

请你用二种方法试一试,一种如问题1、2那样用坐标法来解决,另一种用纯粹几何的办法来解决,并且比较一下。

【提问或提示】 坐标法通过建立平面直角坐标系把点

与数组，图形与方程联系起来，使“形”与“数”结合在一起，因此一般称这门学科为解析几何。

建立平面直角坐标系的关键是：

1. 原点选择：一般有二种选法，一是选直线交点，使直线方程较为简单，二是选对称中心，使对称点的坐标简化，有利于运算。

2. 轴向选择：一般也有二种选法，一是选某一过原点的直线作轴向，可使该直线的方程更简单，而与此直线有关的一些因素的表示也随之而简化，二是选对称轴作轴向，可使表示对称图形的坐标与方程简化。

3. 单位选择：一般选择某一线段长作单位，可使运算简化。

另外，请你想一想，坐标法能否用于三角领域？你可不要忘记，三角函数的定义正是采用了坐标法。

三、你会研究问题吗

任何一个问题的解决都开始于对问题的研究，没有研究就没有解决的办法。

你喜欢研究问题吗？最好是从小就能确立这种钻研精神。为此，数学智能竞赛宫的第三场活动是请你写一份研究报告，活动要求只有两个字：“正确”，可以分成几组，以每组正确人数的多少决定胜负。

我们已经学过定比分点公式，这个公式在应用上的难点是比的确定，因此今天研究的专题名称是《线段 P_1P_2 上分点 P 的位置与所分成二线段之比 λ 的关系》。

研究活动按下列步骤进行：

(一) 先写出 λ 的意义

(二) 研究过程

(1) 当 P 在 P_2P_1 延长线上，离 P_1 越来越远时，如

$$PP_1 = P_1P_2$$

$$PP_1 = 10P_1P_2$$

$$PP_1 = 100P_1P_2$$

$$PP_1 = 1000P_1P_2$$

.....

λ 的值分别如何？ λ 值趋向于什么值？

(2) 当 P 在 P_2P_1 延长线上逐渐趋近 P_1 时， λ 的值如何

变化?

(3) 当 P 与 P_1 点重合时, 求 λ 的值。

(4) 当 P 为 P_1P_2 的 n 等分点 ($n > 2$) 中的第一个分点时, λ 为何值?

(5) 当 P 为 P_1P_2 的中点时, λ 为何值?

(6) 当 P 为 P_1P_2 的 n 等分点中的最后一个分点时, λ 为何值?

(7) 在 P_1P_2 上当 P 逐渐趋近于 P_2 点时, λ 的值如何变化?

(8) 当 P 在 P_1P_2 延长线上离 P_2 越来越远时, 如

$$PP_2 = \frac{1}{100} P_2P_1$$

$$PP_2 = \frac{1}{10} P_2P_1$$

$$PP_2 = P_2P_1$$

$$PP_2 = 10P_2P_1$$

$$PP_2 = 100P_2P_1$$

$$PP_2 = 1000P_2P_1$$

.....

λ 的值分别如何? λ 值趋向于什么值?

(9) 你是否能把上列(1)至(8)项研究结果集中画在一个示意图上。

(三) 上面哪些结果你觉得是有用的? 把它们列出来, 作为研究的结论。

(四) 说明上列研究成果的应用。

请以下列(1)至(4)题为例,解在研究报告后面。

(1) 点 P 分线段 P_1P_2 所成二线段之比 λ 分别为下列各值时,试说明 P 点的位置。

(i) $\lambda = -2$

(ii) $\lambda = \frac{1}{5}$

(iii) $\lambda = \frac{3}{4}$

(iv) $\lambda = -\frac{1}{2}$

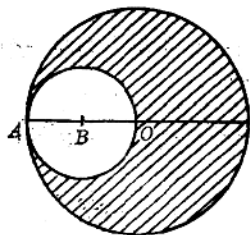
(v) $\lambda = 1$

(2) 已知点 $A(1, 1)$ 、 $B(3, 7)$ 、 $C(5, -3)$, 连接 AB 、 AC , 分别延长到 D 、 E 点, 使 $AD = 3AB$, $AE = 3AC$, 求 D 、 E 二点的距离。

(3) 将直角三角形 ABC 的斜边 AB n 等分 ($n > 2$), D 为其第一个分点, E 为其最后一个分点, 求证

$$CD^2 + CE^2 = \frac{(n-1)^2 + 1}{n^2} \cdot AB^2$$

(4) 一块圆形均匀铁片, 如图, $OA = R$ 为它的一条半径, 在钢片上挖去以 OA 为直径的一个小圆 B , 求剩下钢片的重心位置。



最后, 祝贺你研究成功!

这是一份有价值的研究报告, 作为你青少年时代第一份研究报告, 请你保存好!