高等学校数学系列教材

XIAN XING DAI SHU　xian xing dai shu

线性代数

侯振挺主编

湖南科学技术出版社

高等学校数学系列教材

线性代数

侯振挺主编

湖南科学技术出版社

线 性 代 数

主　　编：侯振挺
责任编辑：胡海清
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市展览馆路 3 号
印　　刷：长沙交通学院印刷厂
（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：长沙市赤岭路 45 号
邮　　码：410076
经　　销：湖南省新华书店
出版日期：1996 年 3 月第 1 版第 1 次
开　　本：787×1092 毫米　1/32
印　　张：6
字　　数：155000
印　　数：1—5600
征订期号：地科 191—17
ISBN 7—5357—1880—9/O·147
定　　价：6.40 元

ISBN 7—5357—1880—9
O·147　定价：6.40 元

本书主编　罗　汉　高纯一

本书主审　郭　忠

序

PREFACE

1993 年，湖南省数学学会与湖南科学技术出版社共同商定，由湖南省推出一套《高等学校数学系列教材》，我荣幸地担任了这套系列教材的主编.

我省中小学教育有很好的基础，在全国有一定的地位. 在改革开放的新形势下，我省高等教育也已经呈现出蓬勃发展的势头. 抓住机遇，发展教育，振兴湖南，这是我们共同的心愿. 教材建设是发展教育的基础性工作，它对于提高教学质量有着至关重要的作用. 这就是我们编写这套教材的动因和出发点.

对于一套好的数学教材的要求是多方面的. 首先是它的科学性. 数学是严谨的科学，数学教学不但要教给学生数学知识，培养学生应用数学知识解决实际问题的能力，还要提高他们的数学修养，养成良好的思维品格. 在这些方面，教材应该起到示范作用；其次是适用性. 教材是教师和学生赖以完成教学过程的主要工具，所以概念的引入，结论的推证，理论的体系，材料的安排，以及例题、习题的选配，都要从教学的实际要求出发，遵循教学活动自身的规律性，方便教师教与学生学；另外，还要注意内容的更新，选进一些新颖的、能反映相应学科的新思想、新趋势的材料，充实教材内容，以适应教育发展和教学改革新形势的需要.

这次出版的四种教材，即《高等数学(上册)》、《高等数学(下册)》、《概率论与数理统计》、《线性代数》，是工科院校本科数学系列教材. 它是由我们省内八所高等院校的部分教师共同努力，精心编写的. 作者们紧紧扣住教学大纲的要求，密切联系工科院校本科数学教学的实际，认真研究了国内各种版本的同类教材，同时参考了英、美、俄等国的教材和习题集，取长补短，力求编出新意，编出特色. 我们希望这套教材在数学教学和数学改革中发挥作用，同时也希望它在教学实践中进一步得到大家的支持、爱护，使之不断地完善.

书中可能还有不少缺点和错漏之处，请读者指正.

侯振挺

1995 年 8 月

前言

PREFACE

线性代数是高等工科院校一门主要的基础理论课程，它的理论和方法在科学技术、工程技术和国民经济等各个领域已得到了广泛的应用. 本书是根据国家教委高等工业学校数学课程教学指导委员会颁发的《线性代数课程教学基本要求》，为适应当前教学的发展和改革而编写的.

我们在编写中，以方便、实用、简明为原则，结合自己多年的教学经验，在结构上作了精心的安排，分五章来讲述矩阵、向量空间 R^n、线性变换、线性方程组、二次型和一般线性空间等基本内容. 鉴于矩阵是应用广泛的一种数学工具，全书突出了矩阵的重要地位，并以矩阵的初等行变换等运算为基本方法贯穿全书.

1. 第一章重点讲述矩阵的一系列理论和方法，并将行列式作为与方阵对应的一个概念来介绍.

2. 第二章主要讨论 n 维向量空间 R^n 及 R^n 中的线性变换的基本概念和理论，其中还介绍了内积和特征值、特征向量，而一般的线性空间和线性变换因为比较抽象，我们专辟第五章加以讨论，供各专业选用.

3. 第三章采用向量空间和矩阵理论来讨论线性方程组相容性的判定问题和解的结构，并介绍了高斯消元法.

4. 第四章从矩阵合同的角度重点介绍了用正交变换化二次型为标准形的方法.

本书所涉及的定理大部分都给出了证明. 为了适应不同专业的不同要求, 我们对部分内容加上 * 号, 在教学时可酌情增删. 全书不包括 * 号部分内容的讲授学时数约为 26~30 学时. 书后附有习题及答案.

本书由湖南大学郭忠教授主持提出编写提纲, 湖南大学罗汉编写了第一、二、三章, 长沙交通学院高纯一编写了第四、五章. 全书由郭忠教授主审定稿. 由于编写者的经验和水平所限, 书中难免疏漏之处, 恳请读者批评指正.

编　者

1994 年 11 月

目录
CONTENTS

第一章　矩阵

在当今科学技术、工程技术和国民经济等各个领域,矩阵及其理论正得到越来越广泛的应用.已经成为不可缺少的数学工具之一.本书将以矩阵理论为重点讲述线性代数的基本知识及其在工程实际中的应用.

在这一章里,我们首先引入矩阵的概念,进而讨论矩阵的性质、运算和初等变换.

§1-1　矩阵的概念和运算

一　矩阵的概念

具有下面形式的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.1.1}$$

称为**线性方程组**.其中 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$代表 n 个未知量,m 是方程的个数,$a_{ij}(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots,n)$称为方程组的**系数**,$b_i(i=1,2,\cdots,m)$称为**常数项**.为便于研究和求解线性方程组(1.1.1),我们把其系数和常数项取出来按原位置列成下表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{1.1.2}$$

这种数表在数学上被称之为矩阵.

定义 1.1.1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$

有次序地排成 m 行 n 列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**，其中 a_{ij}称为该矩阵的第 i 行第 j 列的**元素**[①]. 矩阵简记为$(a_{ij})_{m\times n}$或(a_{ij})，通常用大写字母 A 等表示，强调行数列数时写成 $A_{m\times n}$. 元素是实数的矩阵称**实矩阵**，元素是复数的矩阵称**复矩阵**. 本书中除特别说明者外，只讨论实矩阵.

只有一行的矩阵

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

称为**行矩阵**；只有一列的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**.

两个矩阵若行数相等且列数也相等，则称它们是**同型**的. 若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$同型，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称 A 与 B **相等**，记作

$$A=B.$$

元素全部是零的矩阵称为**零矩阵**，记作 O. 注意不同型的零矩阵是不相等的.

显然，当未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的顺序排定后，线性方程组

① 矩阵的元素也可以是变量、矩阵等.

(1.1.1)和矩阵(1.1.2)是一一对应的，于是可以利用矩阵来研究线性方程组.

二　矩阵的运算

1. 矩阵的加法

定义 1.1.2　设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则矩阵

$$C=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 与 B 的**和**，记作 $C=A+B$.

应该注意，同型的矩阵才能进行加法运算.

容易证明矩阵的加法满足下列运算律，其中 A,B,C,O 均为 $m\times n$ 矩阵：

(i) $A+B=B+A$；

(ii) $(A+B)+C=A+(B+C)$；

(iii) $A+O=A$.

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则矩阵

$$-A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

称为 A 的**负矩阵**，显然有

$$A+(-A)=O,$$

由此定义矩阵的**减法**为

$$A-B=A+(-B).$$

2. 数与矩阵的乘法

定义 1.1.3　设 λ 是常数，$A=(a_{ij})_{m\times n}$，则矩阵

$$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为数 λ 与矩阵 A 的**乘积**.

数与矩阵的乘法满足下列运算，其中 A,B 为 $m\times n$ 矩阵，λ,μ 为常数：

(i) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)$；

(ii) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$；

(iii) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$；

(iv) $1\cdot A=A,(-1)A=-A$.

3. 矩阵的乘法

定义 1.1.4 设 $A=(a_{ik})_{m\times s}$ 为 $m\times s$ 矩阵，$B=(b_{kj})_{s\times n}$ 为 $s\times n$ 矩阵，则 $m\times n$ 矩阵

$$C=(c_{ij})_{m\times n}=\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times n}$$

称为 A 与 B 的**乘积**，记作 $C=AB$.

由定义，AB 的第 i 行第 j 列元素等于 A 的第 i 行各元素与 B 的第 j 列对应元素的乘积之和. 于是只有当第一个矩阵（左矩阵）的列数等于第二个矩阵（右矩阵）的行数时，两个矩阵才能相乘.

例 1 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\text{与 }B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix},$$

求乘积 AB 和 BA.

解 $$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times4+0\times(-1)+3\times2 & 1\times1+0\times1+3\times0\\2\times4+1\times(-1)+0\times2 & 2\times1+1\times1+0\times0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10 & 1\\7 & 3\end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}4 & 1\\-1 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4\times1+1\times2 & 4\times0+1\times1 & 4\times3+1\times0\\(-1)\times1+1\times2 & (-1)\times0+1\times1 & (-1)\times3+1\times0\\2\times1+0\times2 & 2\times0+0\times1 & 2\times3+0\times0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 1 & 12\\1 & 1 & -3\\2 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

由例 1 可知，一般地 $AB\neq BA$，即交换律不成立，因此通常 AB 说成"用 A 左乘 B"或"用 B 右乘 A".

可以证明矩阵乘法满足以下运算规律，其中所涉及的运算假定都是可行的.

(i)$(AB)C=A(BC)$；

(ii)$A(B+C)=AB+AC$；

(iii)$(B+C)A=BA+CA$；

(iv)$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$.（其中 λ 为常数）

在线性方程组(1.1.1)中，记

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

利用矩阵乘法，则该线性方程组便可表为

$$AX=B$$

4. 矩阵的转置

定义 1.1.5 将 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$的行和列互换而顺序不变,得到的一个 $n\times m$ 矩阵称为 A 的**转置矩阵**,记作 A^T 或 A'.

例如矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

的转置矩阵为

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

矩阵的转置也可看作一种运算,满足下列运算规律:

(i) $(A^T)^T=A$;

(ii) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

(iii) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$,($\lambda$ 为常数);

(iv) $(AB)^T=B^TA^T$.

我们仅证明(iv),设 $A=(a_{ik})_{m\times s}$,$B=(b_{kj})_{s\times n}$则 $(AB)^T$ 为 $n\times m$ 矩阵;另 A^T 为 $s\times m$ 矩阵,B^T 为 $n\times s$ 矩阵,故 B^TA^T 也是 $n\times m$ 矩阵.

又 $(AB)^T$ 的第 i 行第 j 列元素是 AB 的第 j 行第 i 列元素,由乘法定义为

$$\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}\qquad (j=1,2,\cdots,n;i=1,2,\cdots,m)$$

而 B^T 的第 i 行为 $(b_{1i},\cdots,b_{si})$,A^T 的第 j 列为 $(a_{j1},\cdots,a_{js})^T$,因此,B^TA^T 的第 i 行第 j 列元素为

$$\sum_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki},$$

$$(j=1,2,\cdots,n;i=1,2,\cdots m)$$

于是有 $B^TA^T=(AB)^T$.

例 2 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\text{与 }B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

求$(AB)^T$.

解 1 因为

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 2 & -1\\ 8 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

所以$(AB)^T=\begin{pmatrix}9 & 8\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

解 2

$$(AB)^T=B^TA^T=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9 & 8\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

对于多个矩阵的连乘积的转置,我们进一步得到

$$(AB\cdots C)^T=C^T\cdots B^TA^T.$$

§1-2 方阵和分块矩阵

一 方阵

行数和列数相同的矩阵通常称为**方阵**,方阵的行(列)数称为它的**阶数**. n 阶方阵可记为 A_n.

显然,若 A,B 均为 n 阶方阵,λ 为常数,则 $A+B$,λA,AB 和 A^T 都是 n 阶方阵.

方阵 A 从左上角到右下角的位置叫 A 的**主对角线**. 一个 n 阶方阵若其主对角线上的元素都是 1,其余元素都是零,即