上海市中学教师进修教材

概率与数理统计

天津人民出版社

概率与数理统计

上海市中学教师进修教材编写组

天津人民出版社

概率与数理统计

上海市中学教师进修教材编写组

*

天津人民出版社出版

（天津市赤峰道124号）

天津新华印刷一厂印刷　新华书店天津发行所发行

*

787×1092毫米　32开本　15.375印张　315千字

1982年1月第1版

1985年3月第2版　　1985年3月第2次印刷

印数：30,801—42,000

统一书号：13072·14

定　价：　2.40元

前　　言

概率与数理统计是研究随机现象规律的数学，它发展迅速，应用广泛．目前，在高等院校的理工科许多专业的课程设置中都把概率与数理统计列为基础部分的教学内容．教育部新编全日制中学数学课本也增加了概率和统计初步知识，因此，广大中学数学教师希望尽快掌握有关这方面的基本知识，以适应中学教学的需要·近两年来，上海教育学院为上海市中学数学教师开设了几期概率与数理统计进修班，本书的内容即以该班的讲义为基础，并参考其它书籍，经过整理修改而成．

本书立足于中学数学教师进修的需要，同时兼供高等院校学生和科技人员参考之用．全书分为概率与数理统计两个部分．概率部分首先详细地介绍了概率的统计定义、古典定义和几何定义，并在此基础上初步提及了概率的公理化定义；对概率的性质和运算作了较详细的阐述；对随机变量（离散型和连续型），我们只在一维情况下讨论了它们的分布、数字特征和极限定理等等的基本性质．数理统计部分主要介绍一些最常用的数理统计方法及其基本原理，如参数估计、假设检验和抽样检验等．有少数结论未作严格推导．凡具有单元微积分基础的同志，都能阅读、看懂本书．学习第

一部分的前四章，读者只需具备初等数学基础即可．未学过微积分而又急需掌握概率初步知识的读者，可选学一至四章．为了照顾有兴趣的读者掌握更多的这方面的知识，本书列举了有关的参考书目．编者希望中学数学教师经过学习之后，能够用较高的观点来处理中学的概率和数理统计内容．

采用本书作为中学教师进修教材时，所需教学时数大致可安排如下：概率部分50课时，数理统计部分40课时，共90课时．

本书由上海教育学院数学系朱光琼，罗威两位同志合作编写．上海师范学院数学系周敬良同志担任审稿，他对本书内容的系统和深广度方面，作出了重要的建议．在编写过程中上海教育学院数学系陈朝龙等同志也提出了宝贵的意见．在此一并表示感谢．由于编者水平有限，缺乏经验以及编写时间匆促，书中不免存在许多错误和缺点，请同志们批评指正。

上海市中学教师进修教材编写组

一九八〇年六月

目　录

第二部分　数理统计

第一部分　概率

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随 机 现 象

在客观世界里，存在着两类不同的现象．一类是确定性现象，另一类是随机现象．

确定性现象的特点是：在一定的条件下，必然出现某一种结果．例如：在标准大气压下，水加热到100°C，必然沸腾；导体通电后，必然发热；在没有外力作用的条件下，作等速直线运动的物体，必然继续作等速直线运动，等等都是确定性现象，这一类现象广泛地存在于客观世界的各个领域．

随机现象的特点是：在一定条件下，其可能结果不止一个．至于哪一个出现，事先无法确定．例如：投掷一枚硬币，可能{徽花朝上}，也可能{币值朝上}，事先作出确定的判断是不可能的；某民兵一次射击，可能{命中10环}，可能{命中 9 环}，……，可能{命中 1 环}，也可能{脱靶}，事先作出确定的判断也是不可能的．还可以举出很多类似的例

子．如：抽查某厂生产的一件产品，可能{是正品}，也可能{是次品}；在一定的气压和湿度下，可能{下雨}，也可能{不下雨}；在一小时内，电话总机接到的呼唤次数，可能{小于10次}，可能是{10至20次}，也可能{大于20次}；等等都是随机现象，这一类现象也同样广泛地存在于客观世界的各个领域，概率统计就是研究随机现象的数学规律的一个数学分支．

在概率统计中，采用什么方法来研究随机现象从而掌握它的内在规律呢？我们先看下面几个例子．

（1）天气现象是随机现象．如果孤立地考察某地区×月×日的天气，要问这天是下雨还是天晴？就会感到偶然性在起着支配作用，难于作出判断．若将该地区历史上几年，甚至几十年的气象观察资料结合在一起考察分析，就能发现该地区天气现象的内在规律．这种规律可以看作是天气现象在大量次重复条件下呈现出来的．

（2）检查两批同类产品的质量时，如果只从每批产品中随机地各抽一件进行比较，就对这两批产品的质量好坏下结论，这种结论是难以令人信服的．因为抽查1件产品所出现的结果是偶然性在起着支配作用．如果从每批产品中不是随机地各抽1件，而是随机地各抽100件，甚至更多件进行比较，然后再对这两批产品质量好坏下结论，则所得结论就比较令人信服．这是因为大量抽查的结果，更能反映整批产品次品率这一客观规律．

（3）一次射击命中环数是随机现象，显然不能根据一次射击的结果来评定甲、乙两射手射击水平的高低．只有当他

们各自进行多次射击之后，才能在射击结果中反映出他们的射击水平.

实践证明，随机现象在大量次重复的条件下，通常总能呈现某种规律性. 我们称此规律性为统计规律性. 可以说随机现象就是，在一次观测中其结果不能事先确定，而在大量次重复观测条件下，其结果呈现出某种规律性的现象. 因此，研究随机现象就必须对它作一定次数的观测，这是由随机现象本身的特点所决定的.

在概率统计里，我们把对随机现象的一次观测称为一次随机试验，简称试验. 随机现象的内在规律一般可在相同条件下通过大量重复试验而获得.

一次试验结果的不确定性，表现了随机现象的偶然性的一面. 而在大量重复试验的条件下呈现出来的统计规律性表现了它的必然性的一面. 随机现象的偶然性和统计必然性是矛盾的统一体，是有密切的内在联系的. 正如恩格斯所指出的"被断定为必然性的东西是由纯粹的偶然性所构成的. 而所谓偶然的东西，是一种必然性隐藏在它里面的形式."例如，某射手在一次射击中可能命中目标，也可能不命中目标，其结果事先不能确定. 如果射手的命中率为90%，那么，当他每进行100次射击时，命中目标的次数将经常在90次左右，这一规律，是由一次一次事先不能确定是否命中的射击构成的. 而每射击一次表现出来的偶然性，也确实为射手的命中率所制约. 这就是随机现象的二重性——偶然性和统计必然性之间的辩证关系. 随机现象的二重性充分说明随机现象是可以认识的. 研究随机现象是为了掌握随机现象的

统计规律性，使它为社会主义建设事业服务.

§1.2 随机事件

考察一个随机现象，就必须对它的各种可能的结果作进一步剖析. 我们称随机现象的可能出现也可能不出现的结果为随机事件，简称事件，并用大写字母A，B，C… 等来表示.

例如："抽查三件产品，观察其质量情况"是随机现象，而{三件产品中出现一件次品}就是一个事件；"明天的天气情况"是随机现象，而{明天是雨天}就是一个事件.

又如，"一次射击命中环数"这一随机现象，有11个可能结果，即{命中i环}，$i=0$，1，…，10. 但还有其它形式的可能结果，如：{命中环数为偶数}，{命中环数大于7}等等. 我们把在一定范围中不能再分解的事件称为基本事件. 例如：{命中i环}，$i=0$，1，…，10. 就是"一次射击命中环数"这一随机现象的全部基本事件.

例 下列随机现象，各有几个基本事件.

(1) 掷一枚匀质硬币；

(2) 电话总机在单位时间内接到的呼唤次数.

解 (1) "掷一枚匀质硬币"这一随机现象共有两个基本事件，可表示为E_1：{徽花朝上}，E_2：{币值朝上}.

(2)"电话总机在单位时间内接到的呼唤次数"这一随机现象的基本事件有：{没有接到呼唤}，{接到 1 次呼唤}，{接到 2 次呼唤}，…，{接到 n 次呼唤}，…，我们说不出接

到多少次为止，这一随机现象有可列无限多个基本事件，可表示为

$$E_i:\ \{\text{接到}\ i\ \text{次呼唤}\},\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

基本事件是简单的事件，一般的事件总是由若干个基本事件共同组成的，例如，在上例的(2)中，设事件B表示{最多接到3次呼唤}，则B是由四个基本事件：{没有接到呼唤}，{接到1次呼唤}，{接到2次呼唤}，{接到3次呼唤}所共同组成的，可表示为$\{E_0,\ E_1,\ E_2,\ E_3\}$，当且仅当$B$所含的一个基本事件出现时$B$才出现.

一随机现象所产生的基本事件，具有下列重要性质：1. 在任何一次试验中，任何两个基本事件不会同时出现；2. 在任何一次试验中，所有基本事件中必定有一个出现；3. 此随机现象所产生的任一事件，都是由若干个基本事件所共同组成的.

与随机现象一样，事件也具有二重性，即在一次试验下，事件出现与否具有偶然性，但在大量重复试验下，事件出现的可能程度具有确定的统计必然性.

为了便于进行讨论，我们把在一定条件下必然出现的事件称为必然事件，用U表示. 在一定条件下必然不出现的事件称为不可能事件，用V表示. 例如：{在标准大气压下，水加热到100°C沸腾}是必然事件；{在常温下焊锡熔化}是不可能事件，必然事件与不可能事件实质上是确定性现象的结果，把它们看作随机事件的两种极端情况，将有助于我们对随机现象的考察和研究。

§1.3 事件之间的关系

为了研究随机现象和掌握事件的统计规律性，我们考察事件间的各种关系和引进事件的“运算”的概念.

经常遇到的事件之间的运算和关系有以下几种.

（1）事件的和

定义 ｛事件A与B中至少有一出现｝所表述的事件，称为事件A与B的和事件，记作$A+B$.

以电话总机在单位时间内接到的呼唤次数为例，设

A表示｛$3\leqslant$接到的呼唤次数$\leqslant 5$｝，

B表示｛$4\leqslant$接到的呼唤次数$\leqslant 7$｝，

则

$A+B$表示｛$3\leqslant$接到的呼唤次数$\leqslant 7$｝.

从基本事件看：

A为 $\{E_3, E_4, E_5\}$，

B为 $\{E_4, E_5, E_6, E_7\}$，

$A+B$为 $\{E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}$.

可见，$A+B$所含基本事件是A与B所含基本事件的全部，重复的只算一次.

类似地，可定义有限个事件的和事件，即：｛事件A_1，A_2，…，A_n至少有一出现｝所表述的事件，称为这n个事件A_1，A_2，…，A_n的和事件. 记作$A_1+A_2+\cdots+A_n$，或简记作$\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$. 类似地，还可定义可列多个事件$A_1$,$A_2$，…$A_n$,…

的和事件$\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

全部基本事件的和是一个什么事件?

若一随机现象所产生的基本事件为E_1, E_2, …, E_n.则$\sum\limits_{i=1}^{n} E_i$表示{$E_1$, E_2,…,E_n至少有一出现}这一事件.由基本事件的性质可知,在一次试验中E_1, E_2, …, E_n出现其一是必然的.因此,$\sum\limits_{i=1}^{n} E_i$是必然事件.即全部基本事件的和事件是必然事件.

不难看出,一般的事件都能表示为若干基本事件的和,如上述事件A为{E_3, E_4, E_5},当E_3, E_4, E_5这三个基本事件有一出现时,A就出现,反之亦然.因此,A可表示为$E_3+E_4+E_5$.

(2) 事件的积

定义 {事件A与B同时出现}所表述的事件,称为事件A与B的积事件,记作$A \cdot B$或AB.

仍以电话总机在单位时间内接到的呼唤次数为例,设

A表示{最多接到5次呼唤},

B表示{至少接到4次呼唤},

则

AB表示{接到4次或5次呼唤}.

从基本事件看:

A为{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5},

B为{E_4, E_5, E_6, …},

AB为{E_4, E_5}.

可见,AB所含基本事件,是A与B所共同含有的基本事件.

类似地,可定义有限个事件的积事件,即:{事件A_1,

A_2，…，A_n同时出现｝所表述的事件，称为这n个事件A_1，A_2，…，A_n的积事件．记作$A_1A_2\cdots A_n$或简记作$\prod_{i=1}^{n} A_i$类似地，还可定义可列多个事件A_1，A_2，…，A_n，…的积事件$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$，

（3）事件的差

定义｛事件A出现而事件B不出现｝所表述的事件，称为事件A与B的差事件，记作$A-B$．

仍以电话总机在单位时间内接到的呼唤次数为例，设

A表示｛最多接到5次呼唤｝，

B表示｛至少接到4次呼唤｝，

则

$A-B$表示｛最多接到3次呼唤｝．

不难看出，$A-B$所含基本事件是A所含基本事件减去AB所含有的那一部分．

例1 设A_i表示｛一次射击命中i环｝，$i=0$，1，2，…，10．

A表示｛$4\leqslant$一次射击命中环数$\leqslant 6$｝，

B表示｛$5\leqslant$一次射击命中环数$\leqslant 8$｝，

C表示｛一次射击命中环数$\leqslant 2$｝，

试表述下列事件的含义：

$$A+B-C,\ ABC,\ A+A,\ AA.$$

解 从基本事件看：

A为｛A_4，A_5，A_6｝，

B为｛A_5，A_6，A_7，A_8｝，

C为｛A_0，A_1，A_2｝．