线性泛函分析选讲

江 泽 坚

中国科学院成都分院数理科学研究室印

一 九 八 二 年

说　明

吉林大学江泽坚教授应中国科学院成都分院邀请，于一九八二年春到我室为研究生讲授泛函分析课。讲授的对象是学过一点泛函，例如南京大学郑维行、王声望同志所编《实变函数与泛函分析概要》（第二册）前两章的同志。为供其他同志学习参考，部分听课同志将讲课内容集体整理成讲义印刷如后。特此说明。

中国科学院成都分院数理科学研究室

一九八二年十月

在30年代初虽然von Neumann已经提出弱拓扑的概念得到二重换位定理，而一般拓扑学也在这之后不久蓬勃地发展起来，但是这在当时并未得到普遍的重视，多数人仍然囿于序列的弱收敛，这可以S.Banach著名的书为代表。我们在第一章中，即以弱拓扑为背景，讲述一般拓扑与泛函分析的关系。

从弱拓扑自然也导致局部凸线性拓扑空间的研究，但是它的大发展却是由于广义函数论的兴起，凸分析的重要性，早已为人所认识。我们在第二章里，则仅从它与存在性证明的关系作点初步的介绍。

N.Wiener在1922年即已指出赋范空间应该在复域上研究，并且说明这样作将促使抽象解析函数的发展。其实这件事，早在1913年以前，F.Riesz就很清楚了，而且他还成功地应用到算子谱论上。但是这个简单而又重要的思想，直到1938年左右才又旧事重提，得到很大的进展。我们在第三章讲述这方面的常识。此外，还注意到算子值域理论。这在算子理论上日益重要，近年来且获得重要的结果，虽然我们还不可能在这样的讲演中有所反映。

Fourier分析与泛函的联系，既深且广。我们认为这对初学泛函分析的人是重要的。为此，在第四章专来谈论这件事。我们所涉及的只是这方面的一小部分。从Fourier变换之L^p理论到$\mathscr{S}'$广义函数。也有一小节介绍群表示与群上的调和分析。

在第五章中，介绍交换的Banach代数。从对偶理论讲到Gelfand表示。

我们假定读者已经具有复旦大学或南京大学所编泛函分析教科书前两章的知识。在这个讲演中我们注意问题的提出，思想的背景，定理的意义和应用，然后才是证明的细节。对一些重要的定理，述而不证，其中甚至有的证明并不很难。这也是一个尝试，我希望它能有益于人。

目　录

第 一 章

一般拓扑学与泛函分析

§1 一般概念

我们知道，在n维欧氏空间R^n中成立着著名的“聚点原则”：R^n中任何有界的点列一定能选出收敛的子序列。它是微积分学赖以建立的基础。

可是在无限维空间中，“聚点原则”不一定成立。

〔例1〕 考察l^2空间中的集合：

$$\{ l_n=(0,\ 0,\ \underset{n}{1},\ 0\cdots),\ n=1,\ 2,\ \cdots \}_\circ$$

显然，$\| l_n \| =1$，$(n=1,\ 2,\ \cdots)$，但是$\| l_i - l_j \| = \sqrt{2}$ $(i\neq j)$因而$\left\{ l_n \right\}_{n=1}^{\infty}$，中不能选出收敛的子序列，尽管它是有界的。

事实上，“聚点原则”是有限维空间的特征。

无限维空间中“聚点原则”不再成立这一事实很早便为Hilbert所认识。他在研究对称核的积分方程时，针对着这个提出了序列弱收敛的概念

定义1.1 设H为Hilbert 空间，$\{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \subset H$，若对任何$y\in H$，皆有$\lim\limits_{n}(x_n,\ y)=(x_0,\ y)$，这里$x_0\in H$，则称$\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$弱收敛到$x_0$，记作$x_n \xrightarrow{w} x_0$。

命题1.1 对可分Hilbert空间H中的单位球U上的任何一串$\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$，总可抽出一个子序列$\{ x_{n_k} \}_{k=1}^{\infty}$和存在一点 $x_0\in H$，使得$x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$。

由此，Hilbert 在弱收敛的意义下建立了无穷维空间H中的“聚点原则”，这当然是一件很有意义的事情。

在此命题的证明中用到了“对角线方法”，亦称“Cantor—Hilbert 方法”。鉴于此法的重要性，虽然可能有人已经见过，我们还要在这里详细地叙述它。

将一串无穷数列排列如下：

$$\begin{array}{l}
a_{11},\ a_{12},\ \cdots a_{1n},\ \cdots \\
a_{21},\ a_{22},\ \cdots a_{2n},\ \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{k1},\ a_{k2},\ \cdots a_{kn},\ \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

并假定$|a_{ki}| \leqslant C$ $(k, i=1,2,\cdots)$ C为一固定正数，根据聚点原则，从第一行中可抽出收敛子列，

$$a_{1n_1^1}, a_{1n_2^1}, \cdots, a_{1n_i^1}, \cdots \xrightarrow[i\to\infty]{} l_1$$

考虑第二行的子列$\{a_{2n_i^1}\}_{i=1}^{\infty}$，仍可以从其中抽出一收敛子列：

$$a_{2n_1^2}, a_{2n_2^2}, \cdots a_{2n_i^2}, \cdots \xrightarrow[i\to\infty]{} l_2$$

注意$\left\{n_i^2\right\}_{i=1}^{\infty}$是$\left\{n_i^1\right\}_{i=1}^{\infty}$的子序列，由此继续下去，可得

$$a_{kn_1^k}, a_{kn_2^k}, \cdots, a_{kn_i^k}, \cdots \xrightarrow[i\to\infty]{} l_k$$

这里$\left\{n_i^k\right\}_{i=1}^{\infty}$是$\left\{n_i^{k-1}\right\}_{i=1}^{\infty}$的子序列，如此进行下去，我们有：

$$a_{1n_1^1}, a_{1n_2^1}, \cdots, a_{1n_i^1}, \cdots \xrightarrow[i\to\infty]{} l_1$$

$$a_{2n_1^2}, a_{2n_2^2}, \cdots, a_{2n_i^2}, \cdots \xrightarrow[i\to\infty]{} l_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{kn_1^k}, a_{kn_2^k}\cdots, a_{kn_i^k}, \cdots \xrightarrow[i\to\infty]{} l_k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

于是对角线上的元，其下指标为kn_k^k，而$\left\{n_k^k\right\}_{k=1}^{\infty}$是$\left\{n_k^i\right\}_{k=1}^{\infty}$的子序列，故

$$\lim_{k\to\infty} a_{in_k^k} = l_i, \quad (i=1,2,\cdots)$$

下面，我们来证明命题本身。

不妨设H为l^2（因为任何可分的Hilbert空间与l^2同构）。设

$$x_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}, \cdots, \xi_{1j}, \cdots)$$
$$x_2 = (\xi_{21}, \xi_{22}, \cdots, \xi_{2j}, \cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \cdots, \xi_{nj}, \cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这里$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l^2$，$\|x_n\| \leqslant 1 (n=1, 2, \cdots)$。我们对上方阵使用“对角线方法”，有

$$x_{n_k} = (\xi_{n_k1}, \xi_{n_k2}, \cdots, \xi_{n_kj}, \cdots) \ (\|x_{n_k}\| \leqslant 1)$$

使得$\lim\limits_{k\to\infty} \xi_{n_kj} = \xi_j$ $(j=1, 2\cdots)$，令

$$x_0 = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_j, \cdots)$$

从$\sum\limits_{j=1}^{N} |\xi_{n_kj}|^2 \leqslant 1$，令$k\to\infty$，便有

$$\sum_{j=1}^{N}|\xi_j|^2\leqslant 1$$

由于N可任意大，故

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2\leqslant 1$$

即　　$x_o\in U$。

以下证明$x_{nK}\xrightarrow{w}x_o$。$\forall y=(\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_j,\ \cdots)\in l^2$，应有$M>o$，使$\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^2\leqslant M$　而

$$|(x_{nk},\ y)-(x_o,\ y)|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_{n_kj}-\xi_j||\eta_j|$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{N}|\xi_{nkj}-\xi_j||\eta_j|+\sum_{j=N+1}^{\infty}|\xi_{nKj}-\xi_j||\eta_j|$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{N}|\xi_{nKj}-\xi_j||\mu_j|+\left(\sum_{j=N+1}^{\infty}|\xi_{nKj}-\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=N+1}^{\infty}|\eta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

但

$$\sum_{j=1}^{N}|\xi_{nKj}-\xi_j||\eta_j|\leqslant M\sum_{j=1}^{N}|\xi_{nKj}-\xi_j|\xrightarrow[k\to\infty]{}0。$$

又对任给的$\varepsilon>o$，

$$\left(\sum_{j=N+1}^{\infty}\xi_{nKj}-\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=N+1}^{\infty}|\eta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant 2\left(\sum_{j=N+1}^{\infty}|\eta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$$

（只需N足够大），因而$(x_{nk},\ y)\xrightarrow{k\to 8}(x_o,\ y)$，由y的任意性，于是$x_{n_K}\xrightarrow{w}x_o$，证毕

〔例2〕　设$J(u)$是Hilbert空间H中的有界弱闭集μ上的弱连续函数，假定有$\{u_n\}\subset\mu$，使　　$J(u_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\inf_{u\in\mu}J(u)$

由于μ有界，知有$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$的子序列$\{u_{nk}\}_{K=1}^{\infty}$，

$$u_{nk}\xrightarrow{w}u_o$$

从μ的弱闭性，知$u_o\in\mu$，从而

$$\inf_{u\in\mu}J(u)=\lim_{k\to\infty}J(u_{nk})=J(u_o)$$

即$J(u)$在u_o处达到其下确界。

从以上的讨论中，我们看到点列按范数收敛已不能满足我们的需要。为了摆脱这种束

绳，我们引入一般拓扑的概念。

定义1.2称集合S的一族子集J是S上的一个拓扑，如果

〈Ⅰ〉：$\phi\in J$，$S\in J$；

〈Ⅱ〉：若$A\in J$，$B\in J$，则$A\cap B\in J$；

〈Ⅲ〉：若$\{A_\alpha;\ \alpha\in I\}\subset J$则$\cup\{A_\alpha;\ \alpha\in I\}\in J$。

S与其上的拓扑J一起叫做拓扑空间，简记为〈S，J〉。J中的元则称为〈S，J〉的开集。

对〈S，J〉，若能赋以距离ρ,使ρ在S上所产生的拓扑与J相同，则称〈S，J〉是可度量化的。

并不是每个拓扑空间都是可度量化的。

S上可赋予各种各样的拓扑J_1，J_2…，构成不同的拓扑空间〈S，J_1〉，〈S，J_2〉，…。有时我们可以将它们加以比较。

定义1.3 设J_1、J_2是S上的两种拓扑，若$J_1\subset J_2$，则称J_1弱于J_2记作$J_1<J_2$。

当J_1弱于J_2时，若S中的序列$\{x_n\}_1^\infty$按J_2的拓扑收敛到x_0，则$\{x_n\}_1^\infty$按J_1收敛到x_0。

定义1.4 〈i〉设$x_0\in$〈S，J〉，若有$U\in J$，使得$x_0\in U\subset N\subset S$，则称N为$x_0$的邻域。

〈ii〉 S之一族子集β叫做x_0的一个邻域基，若(a)对每个$N\in\beta$，N皆为x_0的邻域；(b)对任何x_0之邻域M，必有$N\in\beta$，使得$N\subset M$。

定义1.4 〈S，J〉中S是闭的⟺$S\setminus A$是开的。

x_0称为A的聚点⟺对x_0的任给邻域N，N中均含有A中的不同于x_0的点。

A的一切聚点所成之集称作A的导集，记作A'。

x_0为A的附着点⟺对x_0的任何邻域V，$V\cap A\neq\phi$。

A的所有附着点所作成之集称为A的闭包，记作$\overline{A}$。显然：$A\subset\overline{A}=\overline{A'}\cap A$

定义1.5 〈Ⅰ〉对〈S，J〉与〈T，μ〉间的函数$f:\ S\longrightarrow T$若于任何$A\in\mu$，均有$f^{-1}(A)\in J$，则称f是连续的。

〈Ⅱ〉 若$f:\ S\longrightarrow T$是一对一的，且f与f^{-1}都是连续的，$f(S)=T$，则称f为拓扑变换。

函数的连续性总是与一定的拓扑相关。假如我们事先给定一集合X_1与一拓扑空间〈X_2，J〉，并且给定X_1到X_2的一族函数β，则我们可利用X_2中的拓扑J与函数族β构造X_1中的拓扑,使得β为X_1到X_2的连续函数族。

定义1.6 设β是一族从S到〈T，μ〉的函数，称S上的那个使β成为连续函数族的最弱的拓扑叫做β弱拓扑。

注意，定义1.6中β弱拓扑是存在的，回顾连续性的定义，很自然，我们会考虑

$$\{\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(U_i),\ U_i\in\mu,\ f_i\in\beta\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),n\in N\}$$

它使是我们所需要的β弱拓扑的基。

〔例3〕 设X为Banach空间，X′为X的对偶空间。则X上使得{ x'；$x'\in X'$ }皆连续之最弱的拓扑称为X上的弱拓扑。X在o点的一个弱邻域包含着下列形式的开集

$N(x_1', \cdots, x_n';\varepsilon_i)=\{ x; |x'_i(x)|<\varepsilon_i, i=1, 2\cdots, n \}$这里$x'_i\in X'$，$(i=1, 2, \cdots, n)$

显然，X中原来的赋范拓扑并不是最弱拓扑。

〔例4〕 X′上使得一切泛函$x(x')\triangleq x'(x)$皆连续之最弱的拓扑称为X′上的弱*拓扑

〔例5〕 对任给的一族点集{ $S\alpha$ }$_{\alpha\in I}$，其笛卡尔乘积

$S=\times_{\alpha\in I}S_\alpha\triangleq\{\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}; X_\alpha\in S_\alpha\}$

考察S上的映射：

$$S\longrightarrow S_\beta: \pi_\beta(\{X_\alpha\}_{\alpha\in I})=x_\beta$$

设在S_α上还有拓扑J_α，那么我们称使得一切$\pi_\beta(\beta\in I)$皆连续之S上的最弱拓扑为乘积拓扑。

§2 Moor—Smith 链

我们知道，在距离空间中，序列收敛能用来刻划聚点、闭包，从而开集，因此能用以描述拓扑。可是在一般拓扑空间中，情形便不一样了。例如对于l^2空间的弱拓扑，序列收敛便不足以描述聚点。

〔例1〕(von Neumann)

考察l^2中的点集$A=\{ x_{kn}; k, n=1, 2, \cdots; n>k \}$其中

$x_{12}=(1, 1, 0, \cdots)$，$x_{13}=(1, 0, 1, 0\cdots)$，…，$x_{1n}=(1, 0, \cdots, 0, \cdots 0, 1, 0, \cdots)$

$x_{23}=(0, 1, 2, 0, \cdots)$，$\cdots x_{2n}=(0, 1, \cdots 0, \overset{n}{2}, 0, \cdots)$

……………………，…………………，……………………，…………………………… (1)

总之，这里x_{kn}只是第k个坐标为1，第n个坐标为k，而且其它坐标尽为o的点。显然：

$$\|x_{kn}\|=\sqrt{1+k^2} \qquad (2)$$

以下说明

〈I〉 0是A的弱聚点

对于0点的任一弱邻域{ x; $|x'_i(x)|<\varepsilon, i=1, 2, \cdots n, \varepsilon>0$ } 设$x'_i(x)=(x, y_i)$ $(i=1, 2, \cdots n)$这里$y_i\in l^2$。不妨只考虑n=1的情形。设$x'_1(x)=(x, y_1)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\overline{\eta_j}$，则

$$|x'_1(x_{kn})|=|(x_{kn}, y_1)|=|\overline{\eta_k}+k\overline{\eta_n}|$$

对任给的$\alpha>0$，当k充分大时，$|\eta_k|<\varepsilon/2$，然后固定k，让n充分大，以致$|k\eta_n|<\varepsilon/2$，这时便有$|x_1'(x_{kn})|<\varepsilon$。

这说明，0点的任意弱邻域均含A中的点，所以0点是A的弱聚点。

〈Ⅱ〉 A中任何序列$\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$都不弱收敛于0。

否则，设有A中的序列$\{z_j\}_{j=1}^{\infty}\xrightarrow[弱]{}0$，则由共鸣定理，有自然数N使$\|z_j\|\leqslant N$，$j=1,2,\cdots$。由(2)式，

$\{z_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\{x_{k_n}^{*},\ k\leqslant N,\ n=1,2,\cdots\}$

因而$\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$中必有无穷多个出现在表(1)之同一行中。例如出现在第5行中，那么这些点的第5个坐标就都是1，不会趋近于0。所以$\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$不弱收敛于0。

上例说明，在一般拓扑空间中，有必要将序列收敛的概念加以推广。用广义的收敛性来刻划聚点，从而闭集、开集。这就是下面所要介绍的Moor—Smith链。

定义2.1 我们称非空集合I按照>成为有向集，如果

Ⅰ〉$m\in I$，则$m>m$；

Ⅱ〉 $m,n,p\in I$，$m>n$，$n>p$，则有$m>p$；

Ⅲ〉 对任给的$m,n\in I$，总有$p\in I$，且$p>m$，$p>n$

定义2.2 〈Ⅰ〉 从有向集I到$\langle S,J\rangle$的映射$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$叫做S中的链。

〈Ⅱ〉对S中的链$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$及$x\in S$，若对任意给定的x的邻域V，总有$\beta\in I$，使当$\alpha>\beta$时，有$x_\alpha\in V$则 称链$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$收敛于x

〈Ⅲ〉 对于链$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$与$x_0\in S$，若对于$x_0$的任何邻域V及给定的$\beta\in I$，总存在$\alpha>\beta$，使得$x_\alpha\in V$，则称$x_0$为$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$的聚点。

Moor—Smith 链及其收敛的定义初看起来很抽象，但大家实已在微积分的学习中遇见过了。

〔例2〕 设$f(x)$为$[a,b]$上的有界函数，考察$[a,b]$上的全体分划所成集合$I=\{\triangle;\ \triangle$为$[a,b]$上一个分划：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}$。在I上定义关系>：若$\triangle_1$，$\triangle_2\in I$，$\triangle_1>\triangle_2\triangleq\triangle_2$的分点均为$\triangle_1$的分点(或称$\triangle_2$比$\triangle_1$更细密)，易证$\langle I,>\rangle$为有向集。

$\forall\triangle\in I$， 令$S_\triangle=\sum_{j=1}^{n}M_j\triangle x_j$，$M_j=\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]}f(x)$，$\triangle x_j=x_j-x_{j-1}$则$\{S_\triangle\}_{\triangle\in I}$便是Moore—Smith链。显然$\{S_\triangle\}_{\triangle\in I}$收敛于$\overline{\int_a^b}f(x)dx$(达布上和)。

以下的定理与命题说明Moor—Smith链确能完成数列收敛不能完成的任务。

定理2.1 设$A\subset\langle S,J\rangle$，则$x\in\overline{A}\Longleftrightarrow$有A中之链$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$，使得$x_\alpha\longrightarrow x$。

证明：$\Longleftarrow$显然成立。

至于$\Longrightarrow$，考察$n=\{N;\ N$为x的邻域$\}$。在n上引入关系>：V、$W\in n$，$V>W\triangleq V\subset W$则$(n,>)$成一有向集。$\forall N\in n$，由于$x\in\overline{A}$，故有$x_N\in A\cap N$这样$\{X_N\}_{N\in}$

是A中一链，且对x之任何邻域M，有$x_N \in N \subset M$，当$N > M$。故$x_N \longrightarrow x$，证毕。

定理2.2　设f是从拓扑空间S到拓扑空间T的函数，则f连续的充分必要条件是：对S中任何链$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$，若$x_\alpha \longrightarrow x$，则有$f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$。

证明：$\Longrightarrow$。$\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in I}$为T中之一链。对于$f(x)$的任意邻域V，由于f连续，$f^{-1}(V)$为x的邻域。由于$x_\alpha \longrightarrow x$，所以存在$\beta\in I$，当$\alpha\in I$且$\alpha>\beta$时，$x_\alpha\in f^{-1}(V)$即。即$f(x_\alpha)\in V$，当$\alpha>\beta$时。

$\Longleftarrow$。若f不连续，则存在$x\in S$以及$f(x)$的邻域W，对于x的任意邻域V，皆有$x_V\in V$，但$f(x_V)\notin W$，设x之一邻域所成之集合为u，则$\{x_V\}_{V\in u}\longrightarrow x$，但$f(x_V)\not\rightarrow f(x)$与假设矛盾。证毕。

定义2.3　若有从有向集I到有向集J的函数F：$I\longrightarrow J$使得

〈Ⅰ〉　$y_\alpha = x_{F(\alpha)}$，$\alpha\in I$；

〈Ⅱ〉　$\forall\beta\in J$，只要α充分大时，便有$F(\alpha)>\beta$那么则称$\{y_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$\{x_\beta\}_{\beta\in J}$的子链。

定理2.3　若x为$\langle X, J\rangle$中链$\{x_\beta\}_{\beta\in u}$的聚点$\Longleftrightarrow$存在$\{x_\beta\}_{\beta\in u}$之子链收敛到x

证明　$\Longleftarrow$显然。

至于$\Longrightarrow$，以D记x的全体邻域所成之集合。$E\triangleq\{(\beta, V);\ V\in D, x_\beta\in V\}$。对任意$(\beta_i, V_i)\in E$ $(i=1, 2)$定义　$(\beta_1, V_1)>(\beta_2, V_2)\triangleq\beta_1>\beta_2$，$V_1\subset V_2$，容易验证$(E, >)$成一有向集。取$y_{(\beta,V)}\triangleq x_\beta$那么$\{y_{(\beta,V)}\}_{(\beta,V)\in E}$为$\{x_\beta\}_{\beta\in u}$的子链。这因为

〈Ⅰ〉　存在映射　F：$E\longrightarrow u$，$F(\beta,V)\triangleq\beta$使得

$$y(\beta,V)={}_F x(\beta,V)=x_\beta$$

〈Ⅱ〉　$\forall\beta\in u$和$V\in D$，由于x是聚点，存在$\alpha>\beta$，$x_\alpha\in V$因此$(\alpha,V)\in E$，$F(\alpha, V)=\alpha>\beta$。所以$\{y(\beta,V)\}(\beta,V)\in E$为$\{x_\beta\}_{\beta\in u}$之子链。

最后，对于任意$W\in D$，存在$\alpha\in u$，使$x_\alpha\in W$因而对任何$(\beta, V)>(\alpha, W)$，则有$y_{(\beta,V)}=x_\beta\in V\subset W$，即$\{y_{(\beta,V)}\}_{(\beta,V)}\in E\longrightarrow x$证毕。

§3　紧集

定义3.1　若对$\langle S, J\rangle$中任二相异的点x和y，总有$O_i\in J$ $(i=1,2)$，使得：

$$x_i\in O_i(i=1, 2),\ O_1\cap O_2=\phi,$$

则称(S, J)为Hausdorff（或T_2）的。

定理3.1　若$\langle S, J\rangle$是T_2的，则S内每个链至多收敛于一点。

证明：　否则S内将存在一个链$\{x_d\}_{d\in D}$收敛于二相异点x和y。由S的T_2性，存在x的邻域V_1和y的邻域V_2，使$V_1\cap V_2=\phi$，但是存在$d_0\in D$，使当$d>d_0$时，$x_d\in V_1$，$x_d\in V_2$这与$V_1\cap V_2=\phi$矛盾，证毕。

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

〔例 1 〕 不是任何拓扑空间都是Hauodorff的。例如x是不可数点集。定义J为x中一切有限点集之余集以及ϕ和x，则$\langle x, J\rangle$便非T_2的。因为J中任二元素之交都不空。

定义3.1 对$\langle S, J\rangle$中的子集A，若对任一族开集u，它复盖A，即$A\subset\bigcup_{V\in u}V$，则存在有限多个开集，$\{V_i\}_{i=1}^{n}\subset u$，使得$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}V_i$，则称A是紧的。

定理3.2 S是紧的$\Longleftrightarrow$S的每个链都含有收敛子链。

证明：$\Longrightarrow$设$u\in J$复盖S，考察$J=\{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$，$F_i\in u\,(i=1,2,\cdots\cdots m)$，则J全体按包含关系成为有向集$\sigma$。若定理不真，则每个$J\in\sigma$有$X_J\in X\setminus\bigcup_{F\in J}F$。由假设$\{x_J\}_{J\in\sigma}$有收敛的子链由定理2.1，$\{x_J\}_{J\in\sigma}$有一聚点x。按聚点的定义，对x之任何邻域U，$\{U\}\in\sigma$必有$D=\{D_1, \cdots, D_n\}$使$X_D\in U$，而$D>\{U\}$，这样$X_D\in U\subset\bigcup_{d\in D}d$与$x_D$的定义矛盾。

$\Longrightarrow$ 否则有$\{y_\alpha\}_{\alpha\in I}$，它没有任何收敛的子链。由定理2.1，任何$x\in S$都不是$\{y_\alpha\}_{\alpha\in I}$的聚点，所以对任意$x\in S$，都有x的邻域$U_x$以及$\alpha_x\in I$，使$y_\alpha$不属于$U_x$，当$\alpha>\alpha_x$

$\{U_x\}_{x\in S}$复盖S，从而由S的紧性，有$x_1, \cdots x_n$，使$\bigcup_{i=1}^{n}U_{x_i}=S$。另一方面当然有$\alpha_0>\alpha_{x_1}, \cdots, \alpha_{x_n}$，从而$y_{\alpha_0}\in Ux_i\quad(i=1, 2\cdots n)$矛盾。证毕。

引理 设$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$S=\times_{i=1}^{n}Si$中的链，$x_\alpha=\{x_{\alpha 1}, \cdots, x_{\alpha n}\}$，则$x_\alpha\to x\Longleftrightarrow x_{\alpha i}\longrightarrow x_i\,(i=1, 2, \cdots, mn)$，这里$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

证明：先证$\Longrightarrow$由乘积拓扑的定义，$\pi_i(x_\alpha)=x_{\alpha i}$为连续的，故于$x_\alpha\to x$有$\pi_i(x_\alpha)\to\pi_i(x)=x_i\,(i=1, 2, \cdots n)$。

至于$\Longleftarrow$，对x_i之任给的邻域$U_i\,(i=1, 2, \cdots\cdots n)$，考察其中任意n个相应之交$N=\cap\pi_i^{-1}(Ui)$，由Γ弱拓扑的定义，如此的N构成乘积拓扑下x点的邻域基底，而对于N，由假设显然有$\beta\in I$使$x_\alpha\in N$ 当$\alpha>\beta$时
故按乘积拓扑有$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}\to x$证毕。

命题3.1 设$\{A_i\}_{i=1}^{n}$是n个紧集，则$A=\times_{i=1}^{n}A_i$按乘积拓扑也是紧的。

证明：设$\left\{x_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$是A中的链，$x_\alpha=\{x_{\alpha 1}, \cdots, x_{\alpha n}\}$。从$A_1$是紧的，由定理3.2，有$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$之子链$\{x_{F(r)}\}_{r\in C}$使$\{x_{F(r)}\}_{r\in C}\longrightarrow x_1\in A_1$。据有限归纳法便存在$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$之子链$\{x_{G(\delta)}\}_{\delta\in D}$，使得

$$\{x_{G(\delta)}\}_{\delta\in D}\longrightarrow x\in A$$

于是从定理3.2，可见A是紧的，证毕。

〔例 2 〕 $A_i=[-M_i, M_i]$是数直线上的紧集$(i=1,2,\cdots)$，著名的对角线方法告诉我们，$\times_{i=1}^{\infty}A_i$是列紧的。

事实上，命题3.1不仅在n＝可数无穷时成立，更进一步有：

定理3.3（Tychonoff） 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$是一族紧空间，则$\times_{\alpha\in I}A_\alpha$按乘积拓扑是紧的。

（证明可参见John L. Kelly, General Topology）

这个定理是一般拓扑学中最重要的结果，它在泛函分析中有着许多重要的应用。

§4. Stone—Weierstrass定理

设X是紧Hausdorff空间，C（X）表示X上全体的复值连续函数所成之集（$C_R(X)$表X上全体实值的连续函数）它们均按普通的函数相加与数乘构成线性空间。$\forall f\in C(X)$（或$C_R(X)$），规定$\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in X}|f(x)|$ 则$C(X)$（或$C_R(X)$）按$\|\cdot\|_\infty$成为Banach空间。

$\forall f,g\in C_R(X)$，$\max\{f,g\}\in C_R(X)$即$C_R(X)$关于所谓格的运算

$f\vee g\triangleq\max\{f,g\}$、$f\wedge g\triangleq\min\{f,g\}$是封闭的。

定义4.1 〈i〉若B是$C_R(X)$中的线性流形，并且对乘法运算封闭，则称B是$C_R(X)$中的子代数。

〈ii〉设$B\subseteq C_R(X)$，若$\forall x,y\in X$，$x\neq y$，恒有$f\in B$，使$f(x)\neq f(y)$，则称B是能分离点的。

定理4.1（Stone—Weierstrass定理）

设A是$C_R(X)$中能分离点的子代数，并且在范数$\|\cdot\|_\infty$下是闭的，又$1\in A$，则$A=C_R(X)$

引理1 设$A\subseteq C_R(X)$，且在格的运算$\vee$与$\wedge$下封闭。如果对任给的$p,q\in X$及$\varepsilon>0$，总有$f_{p,q}\in A$，使

$|f_{p,q}(P)-f(q)|<\varepsilon$与$|f_{p,q}(q)-f(q)|<\varepsilon$

则$f(x)$在A之按$\|\cdot\|_\infty$的闭包$\overline{A}$中。

证明：$\forall p,q\in X$，考察开集

$U_{p,q}=\{x;\ f_{p,q}(x)<f(x)+\varepsilon\}$

$V_{p,q}=\{x;\ f_{p,q}(x)>f(x)-\varepsilon\}$

显然，p和q均属于$U_{p,q}$与$V_{p,q}$。固定q，变动p。则$X=\cup\{U_{p,q};\ p\in X\}$，由X之紧性，有$U_{p_1,q},\cdots,U_{p_n,q}$复盖X，作函数

$$f_q(x)=\bigwedge_{k=1}^{n}f_{p_k,q}(x)$$

那么

$$f_q(x)\begin{cases}<f(x)+\varepsilon & \forall x\in X\\ >f(x)-\varepsilon & \forall x\in\bigcap\limits_{k=1}^{n}V_{p_k,q}\end{cases}$$

定义 $V_q=\bigcap\limits_{k=1}^{n}V_{p_k,q}$，当然$q\in V_q$。又$V_q$是开的从而也有$V_{q_1},V_{q_2},\cdots,V_{q_m}$复盖X。

令：

$$f\varepsilon(x)=\vee_{i=1}^{m} f_{x_i}(X)\text{，则}f\varepsilon(x)\in A\text{，且}$$

$$f(x)-\varepsilon<f_\varepsilon(x)<f(x)+\varepsilon\cdot\quad\forall x\in X$$

证毕。

引理2　设$A\sqsubseteq C_R(X)$，且按$\|\cdot\|_\infty$是闭的子代数，$1\in A$，则A对格的运算也是封闭的。

证明：由于

$$f\vee g=\frac{f+g}{2}+\frac{|f-g|}{2}$$

$$f\wedge g=\frac{f+g}{2}-\frac{|f-g|}{2}$$

所以只须证明$\forall f\in A$，有$|f|\in A$即可。

设$f\in A$，则$|f(x)|\leq M$，$\forall x\in X$（因为f连续又X是紧的）。从而当$n>M$时，

$$-n<f(x)<n$$

由Weierstrass逼近定理，有多项式$Pn(t)$，使得

$$||t|-P_n(t)|<\varepsilon\qquad\text{当}-n\leqq t\leqq n\text{。}$$

从而有$||f(x)|-P_n(f(x))|<\varepsilon$，当$x\in X$

注意A是闭代数，$1\in A$故$Pn(f(x))\in A$，且$|f(x)|\in A$

证毕。

下面我们来证明定理4.1。

$\forall x_i\in X$（$i=1,2$）$x_1\neq x_2$，由假设有$f\in A$，使得$f(x_1)\neq f(x_2)$。故于任给的实数r_1、r_2，有$F(x)\in A$，使$F(x_1)=r_1$，$F(x_2)=r_2$。这只须令

$$F(x)=2f(x)+\beta$$

这里α、β为方程组

$$\begin{cases}\alpha f(x_1)+\beta=r_1\\ \alpha f(x_2)+\gamma=r_2\end{cases}$$

的唯一解。于是$\forall\varphi(x)\in C_R(X)$及p、$q\in X$，总有$F(x)\in A$，使得$F(p)=\varphi(p)$、$F(q)=\varphi(q)$、而由引理2，代数A按格的运算是闭的。于是由引理1　$\varphi(x)\in\overline{A}=A$，定理证毕。

定理4.2（复的Stone－Weierstass定理）

设O是$C(X)$中能分离点的子代数，且在$\|\cdot\|$下是闭的。又$1\in O$，且于任何$f\in O$恒有$\overline{f}\in O$则$O=C(X)$。

证明：　设O中一切取实值的函数构成O_r则O_r闭。$\forall x\neq y$，由假设有$f\in O$，使$f(x)\neq f(y)$取

$$f_1(x)=(f(x)+\overline{f(x)})/2;$$

$$f_2(x)=(f(x)-\overline{f(x)})/2i,$$

则$f_1 \in Or$，$f_2 \in Or$，显然$f_1(x) \neq f_1(y)$或者$f_2(x) \neq f_2(y)$即 Or 是分离点的，而$1 \in Or$由定理4.1，$O = C_R(X)$、于是$O = C(X)$证毕。

例 应该看到定理4.2较定理4.1多了一个条件：$f \in O \Longrightarrow \bar{f} \in O$。这是不能缺少的。这只须考察单位圆域$D = \{\zeta;\ |\zeta| \leq 1\}$上连续且在内部解析的函数构成的函数代数的即可。

§5 线性空间上的弱拓扑

设X为线性空间，Y是X上一族能分离点的线性函数，则X上一切能使Y中函数皆连续的拓扑中之最弱者叫做Y弱拓扑，记作$\sigma(X、Y)$

引理5.1 设g，φ_1，$\cdots \varphi_n$是线性空间X上的线性泛函。若从$\varphi_i(x) = o\ (i = 1, 2, \cdots, n)$便有$g(x) = o$，则$g$是$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$的线性组合。

证明：考察$T: X \longmapsto E^n$。$\forall x \in X$，

$T(x) \triangleq (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x))$。由于$T(x) = T(y) \Longleftrightarrow \varphi_i(x) = \varphi_i(y)$即$\varphi_i(x-y) = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$由假设知$g(x-y) = 0$即$g(x) = g(y)$。所以我们可定义$\psi(T(x)) \triangleq g(x)$，$\psi$为$E^n$的子空间上的函数。当然$\psi$可扩张到整个$E^n$上成为$\psi_1$。设

$$\psi_1(z_1, \cdots z_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i \quad (a_i\text{由}\psi_1\text{确定})$$

则：

$$g(x) = \psi_1(T(x)) = \sum_{i=1}^{n} a_i \psi_i(x)$$

证毕。

下面的定理能帮助我们理解$\sigma(X, Y)$的本质

定理5.1 X上的线性泛函f在$\sigma(X, Y)$下连续$\Longleftrightarrow$ f能被Y中的有限个元素表示出。

证明：$\Longleftarrow$ 显然。

至于$\Longrightarrow$，$f(x)$在$x = 0$处按$\sigma(X, Y)$连续，因此有o的弱邻域

$\{x;\ |y_i(x)| < \varepsilon \quad i = 1, 2, \cdots, n,\ y_i \in Y\} \subseteq \{x: |f(x)| < 1\}$

若x_0使$y_i(x_0) = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$，则对一切正整数k均有$y_i(kx_0) = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$故$|f(kx_0)| < 1$，从而

$$f(x_0) < \frac{1}{k},\ k = 1, 2, \cdots$$

于是 $f(x_0) = 0$，由引理5.1

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i(x)。$$

证毕

回到赋范空间X，则X上的弱拓扑即$\sigma(X, X^*)$，而x'上的弱*拓扑即$\sigma(X^*, X)$

在X的弱拓扑上，序列的收敛性已经不够用了。但这并不是说，序列收敛不重要。相反，序列的弱收敛仍是我们经常关心和注意的事情，特别是对每一个赋范空间，我们都要探索其中序列弱收敛的充要条件。例如对于Hilbert空间，我们有如下命题：

命题5.1　设$\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$是Hiblert空间H中的正规直交基。$\forall x\in H$，定义

$x^\alpha \triangleq (x, \varphi_\alpha)$，设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为H中的序列，则$x_n \xrightarrow{w} x_0$必须且只须

〈i〉$\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$有界

〈ii〉$x_n^\alpha \longrightarrow x_0^\alpha \qquad \forall\alpha\in I$

附注：若将此序列换成链，则此命题不成立！这可参见§2　von Neumann反例。其中所说的$A\subset l^2$，既然o为A的弱聚点，则由定理2.1，有A中的链$\{g_\beta\}_{\beta\in I}\xrightarrow{w} 0$。但如该反例所说，$\{g_\beta\}_{\beta\in I}$不能全部出现在前N行，因为$\{\|g_\beta\|\}_{\beta\in I}$是无界的。

我们已知道，在无穷维空间中，已没有有界闭集一定是紧的性质。但我们引进弱拓扑的概念后，这种损失能在一定的程度上得到补偿。

定理5.2　(Banach—Alaoglu)

记(B)空间X之对偶空间为X^*。则X^*上之单位球$\Lambda=\{X^*;\ \|X^*\|\leqq 1\}$是$w^*$紧的。

证明：注意$\forall x^*\in\Lambda$及$x_0\in X$。

$$|x^*(x_0)|\leqq\|x^*\|\,\|x_0\|\leqq\|x_0\|$$

考察$B_{x_0}=\{\lambda\in C;|\lambda|\leqslant\|x_0\|\}$以及由它们生成的

$$\beta=\times_{x_0\in X} B_{x_0}$$

由Tychonoff定理，β按乘积拓扑是紧的。而$x^*\in\Lambda\Longrightarrow\{x^*(x_0),\ x_0\in X\}\in\beta$，可以认为$\Lambda\subseteq B$。

设链$\{x_r^*\}_{r\in J}\subseteq A$，由β的紧性，有子链$\{y_\alpha^*\}_{\alpha\in I}$按乘积拓扑收敛到$\ell\in\beta$。也就是说：

$$\lim y_\alpha^*(x)=\ell(x)\quad \forall x\in X$$

显然$\ell(x)$是X上的线性函数，又

$$|\ell(x)| = \|\lim y_\alpha^*(x)|\leqq\|x\|$$

即$\ell\in\Lambda$，定理证毕。

〔例1〕对于拓扑空间(X, Y)，若X中的任一无限子集均能选出收敛的子列，则称X是列紧的。一般说来，紧和列紧是两个不同的概念，利用定理5.2，我们可给出如下具体的例子。

$\forall x \in \ell^{\infty}$，（$x=\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$）作泛函，

$$\delta_n(x) \triangleq \xi_n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

易见$\delta n \in (\ell^{\infty})^*$，且$\|\delta n\| \leq 1$，由Banach—Alaoglu定理，$(\ell^{\infty})^*$之单位球$\Lambda$是$w^*$紧的

可是$\{\delta n\}_{n=1}^{\infty}$却没有任何$w^*$收敛的子序列。这因为对任给的$\{\delta_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，

作：

$$\xi_n^0 = \begin{cases} 1 & 当n=n_i 且i是奇数 \\ -1 & 当n=n_i 且i是偶数 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

令$x_0=\{\xi_1^0, \xi_2^0, \cdots \xi_n^0 \cdots\} \in \ell^{\infty}$。显然

$$\delta n_i(x_0) = \xi_{n_i}^0 = \begin{cases} 1 & 当i是奇数 \\ -1 & 当i是偶数 \end{cases}$$

故$\{\delta n_i(x_0)\}$不收敛。所以Λ是w^*紧而非w^*列紧者。

此外由于$\{\delta n\}_{n=1}^{\infty}$是$\Lambda$中的一链，由$\Lambda$的$w^*$紧性，$\{\delta n\}_{n=1}^{\infty}$应有$w^*$收敛的子链。因而此例也说明一个序列的子链未必是子序列。

〔例 2〕，考察典型映射，$x_0 \in X$；$x_0 \to x_0^{**} \in X^{**}$，$x_0^{**}(x^*) \triangleq x^*(x_0)$。这样每个$x_0$成为$\Lambda=\{x^*; \|x^*\| \leq 1\}$上的连续函数，而且$\|x_0^{**}\| = \|x_0\|$。于是X保范同构于$C(\Lambda)$上的一个子空间，其中$\Lambda$是$w^*$紧的。也就是说X中的元总可以看做紧空间上的连续函数。

§ 6 紧空间上的测度与积分，Riesz—Markov定理

从本世纪初，Lebesgue引进新的测度和积分，其后Lebesgue积分的概念又有很大的发展与推广。这些主要表现在以下两个方面：

一是摆脱了拓扑结构的积分测度（Frechet，Hahn，Radon等等）而概率化公理系统就是建立在这一基础之上的。

二是有拓扑结构，但比起欧氏空间来大大发展和推广了（F.Riesz，Daniell，Bourbaki等）

以下我们主要谈论第二种。

早在1904年，Lebesgue 在其著作中表明他已看到了积分与线性泛函的关系，并试图用线性泛函来刻划积分。1915年，Daniell认识到，Riemann积分是$C[a,b]$上的正的线性泛函。$L(f)=\int_a^b f(x)dx$不仅对f是线性的，而且$L(f) \leq 0$当$f \leq 0$时。从此，人们常常从线性泛函来看积分，然后作如今所说的Daniell扩张。

从前面所指出的第一种观点来看，是以测度为主，积分是派生的（相当于概率论，以概

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com