

广义泊松方程及其 在多种学科中的应用

The Generalized Poisson Equation
and the Application in Multi-fields

李春宝 著

5.25
6

 大连海事大学出版社

© 李春宝 2003

图书在版编目(CIP)数据

广义泊松方程及其在多种学科中的应用 = The Generalized Poisson Equation and the Application in Multi-fields / 李春宝 著. — 大连 : 大连海事大学出版社, 2003.6
ISBN 7-5632-1646-4

I. 广… II. 李… III. 泊松方程—应用—研究
IV. O175.25

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 016859 号

大连海事大学出版社出版

地址:大连市凌水桥 邮编:116026 电话:4728394 传真:4727996

<http://www.dmupress.com> E-mail: cbs@dmupress.com

大连铁道学院印刷厂印装 大连海事大学出版社发行

幅面尺寸:140 mm×203 mm 印张:2.5

字数:40 千字 印数:1~500 册

2003 年 5 月第 1 版 2003 年 5 月第 1 次印刷

责任编辑:陈 航 版式设计:陈 航

封面设计:王 艳 责任校对:一 艺

定价:9.00 元

本书由

大连海事大学学术著作出版基金资助出版

The published book is sponsored by

The Academic Works Publishing Foundation
of the Dalian Maritime University

本书为纪念伟大数学家 Simeon Denis Poisson 建立经典泊松方程一百九十周年而作；同时也为纪念中华民族发明指南针，探求揭示当今瞩目的“地磁之谜”而作。

李春宝

自序

在童年的时候,父兄就严肃告诫和谆谆嘱咐:千万不要去到与家相邻的大河里游泳。河上横跨铁路的钢桥、桥墩深深沉入河床,在桥墩根部有急流旋涡,鹅毛都会被吸入水底,人被水卷入旋涡,尽管有再好的浮水本领,也难逃活命!就这样,对旋涡和吸力的恐怖,从幼小时代就深深印在脑海里。随着年龄的增长,又听有新的传说,那就是龙卷风,能把汽车卷上高空,人由甲地被吸起而在数十米外的乙地落下……在日常生活中,也看到不少旋涡的事例,不管是祖辈世代相传,或自己亲历的实践经验,都是只知其然,不知其所以然。究竟是什么原因,促使旋涡和吸力之间有如此密切的关系?

伟大数学家 Simeon Denis Poisson 在 1812 年所确立的经典泊松方程,用数学语言描述矢量场的集结或发散的现象,对有些流体的速度场来说,就是源头吸入或喷出的物理现象。由于经典泊松方程没有和涡旋发生关系,涡旋场是经典泊松方程不能适用的区域。

1981 年 11 月,著名期刊《应用数学和力学》刊出了笔

者经多年研究而突破经典泊松方程的涡旋禁区之作《从给定的旋度函数和散度函数构造矢量场》。在这篇论文中,推出了能够适用于旋度场和散度场的新型泊松方程,而经典泊松方程是这种新方程在旋度为零时的特殊情况,得到了涡旋诱生散度的定量公式,通过数学语言描述了涡旋引起吸力的物理规律。为表示经典泊松方程与这一新型泊松方程的区别,就把后者——新型泊松方程称为广义泊松方程。从它的出现到现在已整整 20 年了。在这漫长的时间里,作者的研究工作一直继续进行,研究出了广义泊松方程在多种领域,诸如在物理学、电波学、气象学、地球科学等多学科中的应用。这本书综合了笔者数十年间在国内外发表的研究成果。相信,由于本书内容涉及科学发展中的新领域,因此绝不是已经尽善尽美,也绝不是到此终止,还有赖于后继的英才,继续补充和完善,世代协力,为人类文化的发展进步,共同雕刻一块铺路石。

前 言

本书内容使只能应用于散度场的由伟大数学家 Simeon Denis Poisson 所建立的泊松方程,推进为可应用于旋度场和散度场的广义泊松方程,为数学、物理学、电工学、电磁场与电磁波、流体力学、气象学、地球物理学等领域增添了新概念和新内容,诸如相关位函数、等效散度、等效磁荷密度、电流密度矩、旋涡链等等。本书的基础部分——“一般矢量场的新解法及其应用”曾获国家教委科技进步一等奖。其后,近 15 年来又陆续研究开发新成果,在国内外发表,分别获得英国剑桥和美国等的研究机构授予的 20 世纪杰出成就奖等奖励。本书适合数学、物理、电机工程、电子工程、通信导航及雷达、流体力学、气象学、地球物理学等专业的本科生、研究生,以及研究人员、教学人员、工程技术人员等参考。

作者

作者简介 李春宝，男，1928年11月生，辽宁省锦州市人。1952年毕业于北京大学电机系。大连海事大学教授，“通信与电子系统”博士点导师；中国电子学会会士、IEEE高级会员，英国剑桥国际传记中心顾问委员会（IBC Advisory Council）顾问，德国“数学粹要”专刊评论员。历任中国造船学会电子技术委员会副主任、辽宁省电子学会信息与通信委员会主任委员、大连市电子学会副理事长等。

几十年来讲授通信、导航、雷达等多门课程，为中国的通信导航事业培养了大批人才和多名研究生。“一般矢量场的新解法及其应用”成果获国家教委科技进步一等奖，“双同步卫星通信导航综合系统”获中国电子学会优秀奖。1991年获国家教委和科委“科技先进个人”奖，1997年获大连市“优秀专家”称号。1996年在英国发表“应用新计算方程模拟大气旋风”，建立了广义泊松方程并研究出其在多种学科领域的应用。

目 录

第 1 章 从经典泊松方程的诞生到广义泊松方程 的确立(1812~2001)	(1)
第 2 章 含旋涡和源头的一般矢量场	(7)
§ 2.1 从给定的旋度函数和散度函数构造矢量场	(7)
§ 2.2 由旋度函数和散度函数确定的方程组及其解	(8)
§ 2.3 证明	(9)
§ 2.4 推论	(15)
第 3 章 广义泊松方程	(17)
§ 3.1 在正交曲线坐标系中的广义泊松方程	(17)
§ 3.2 广义泊松方程的各种表示形式	(24)
第 4 章 广义泊松方程在电磁场与电磁波理论中的应用	(27)
§ 4.1 广义泊松方程在电磁场中的应用	(27)
§ 4.2 广义泊松方程在电磁波理论中的应用 ——求解麦克斯韦方程的新方法	(30)

§ 4.3	求解赫兹(Hertz)偶极子的辐射场	(36)
§ 4.4	几点推论	(41)
第 5 章	广义泊松方程在气象学飓风领域的应用	(43)
§ 5.1	飓风速度场的数学表述	(43)
§ 5.2	用相关标量位表示速度矢量场	(44)
§ 5.3	旋风的数学模型	(46)
§ 5.4	旋风柱内的空吸现象	(47)
§ 5.5	飓风中的旋涡链	(48)
第 6 章	广义泊松方程在地球科学中的应用	(51)
§ 6.1	历史上有关地磁的研究和应用	(51)
§ 6.2	等效磁荷密度与电流密度矩	(53)
§ 6.3	在球体中产生等效磁荷的必要且充分条件	(56)
§ 6.4	因地球转动由地壳和地幔所产生的地磁	(56)
§ 6.5	地心产生的磁场	(59)

第 1 章

从经典泊松方程的诞生到广义泊松方程的确立(1812~2001)

涡旋和源头是自然界的基本现象。由涡旋和源头在自然界多种领域所产生的场,例如气体或流体的速度场、物理学和无线电波学的电磁场等等,时刻在自然界的环境和人类的生活中占有着各自的空间领域。历代的不少科学家用严谨的数学方程研究、描述客观物理现象的规律。伟大的数学家塞密昂·丹尼斯·泊松(Simeon Denis Poisson)在1812年创立了著名的经典泊松方程。100多年来,经典泊松方程在科学领域里得到了广泛的应用,有着光辉的发展历程。由于经典泊松方程只能应用于具有源头或负源头的散度场,而不能应用于含有涡旋的场,就是说经典泊松方程只能应用于自然界存在的一般矢量场中的一部分场,这使它的应用受到严重的限制。

1981年11月,中国著名的期刊《应用数学和力学》在国际科学界纪念经典泊松方程创立170周年的时候,刊载了一篇《从给定的旋度函数和散度函数构造矢量场》的

论文,从此出现了既可以应用于散度场又能应用于旋度场的泊松方程,这种新的泊松方程就定名为广义泊松方程。在广义泊松方程的建立过程中,引入了一个新的标量位函数,称为相关位函数;而经典泊松方程则归结为广义泊松方程在旋度场为零时的特殊情况。

由于广义泊松方程可应用于包括涡旋场和散度场的一般矢量场,在此后的 20 年间相继开发出了广义泊松方程在多种科学领域的新应用,包括在电磁学领域、无线电波辐射领域、气象学飓风领域和地球科学中的地磁领域等的应用。1984 年 1 月,《应用数学和力学》又刊出了《相关位函数和求解 Maxwell 方程的新方法》。文中给出了广义泊松方程在求解直线电流磁场分布的应用和在电磁波理论中用以求解麦克斯韦方程(Maxwell 方程)的新方法,并且进一步应用这种新方法求解 Hertz 偶极子产生的辐射场。在开发这种应用中,对于交变电磁场,将相关位函数延伸为两个新的滞后相关位函数:滞后相关电位函数和滞后相关磁位函数。这两个位函数不同于经典的滞后位 A 和 ϕ ,使得在求解麦克斯韦方程时,既不需求解滞后位 A 和 ϕ 的 4 个波动方程式,也不需要求解 Hertz 矢位 π 的 3 个波动方程式,只需要求解滞后相关电位 ψ_e 和滞后相关磁位 ψ_m 的 2 个波动方程式。由这种新方法所得

的结果与经典方法相同。

1986年,中国国家教育委员会鉴于广义泊松方程在包括旋度和散度的一般矢量场中的应用,是一项在数学和物理学领域的创新,特授予科技进步一等奖。在这一段历史时期,国际科技界也对这一科学成果给予了关注和重视。1985年8月在日本京都举行的国际天线和电磁波传播学术会议(ISAP)以及1989年在日本东京举行的该国际会议都相继对这项学术成果给予了国际荣誉学术地位:笔者先后在电磁波导波学术会议和电离层中电波传播学术会议上,被推举担任联合主席。

20世纪后期以来,地球环境的开发和保护问题,已经愈益受到世界许多国家的关注。对于生产建设、社会生活乃至国际事业影响至巨的气象学飓风领域,受到发达国家的密切关注。飓风包括龙卷风属涡旋场在空间的分布,每年都频繁地横扫陆地和海洋,给不少国家招致巨大的灾害。其成因和内部结构,在人类有史以来,一直是未解之谜。由于缺乏数学规律的描述和指引,许多科学家采用观测手段致力于揭示旋风之谜。美国国家海洋大气管理局(NOAA)所领导的设立于俄克拉荷马大学的剧烈风暴实验室,用汽车装载仪器设施,实地追踪龙卷风,代号为“TOTO”;也有利用飞行器观测的代号为“TRAP”的著名“龙卷风研究飞行规划”等等。在中国,由中科院等

20 多个单位的科学家共同参与制定“空间天气战略规划”,建立空间天气的物理模式和预报模式,加强对空间天气的监测能力,为卫星、导航、通信、电力、勘探以及国防、载人航天等高技术领域提供安全保障。可见世界一些主要国家都在瞄准气象学领域进行研究开发。广义泊松方程作为一种研究空间场分布的数学工具,在 1996 年于英国利兹(Leeds)举行的第一届国际地学计算学术会议上,以“应用新计算方程模拟大气旋风”为题,在该次学术会议上,向世人揭示了气旋的直立涡旋柱内、外速度场的公式,建立了旋风的数学模型,给出了龙卷风中涡旋诱生空吸的必要条件,并用“旋涡链”理论揭示了飓风和龙卷风的内部结构。有关这些内容,将在第 5 章中详细论述。

中国古时的四大发明之一,是几千年前就开始利用地磁现象的指南针,虽然这一发明已有几千年的历史,但地磁现象究竟是怎样产生的,在科学昌明的今天,仍是未解之谜。虽然人类早已登上月球并正向更遥远的星球进军,但人类仍未能更好地了解自己赖以生存的地球的深部世界。世界各国的科学家正力图改变对地球深部认识的落后状况。近几十年来,许多国家的科学家们竞相采用钻探的方法,甚至使用火箭钻探,向地球“心脏”进军。这其中有美国地质勘探局在美国加州圣德列斯的断层附近进行对地球的钻探,但仅钻到地壳十多公里以下就无

能为力了。面对深达数千公里的地球“心脏”,仅凭钻探方法探知,显然是不可行的,何况仅是地球的一些孤立点。中国科学院地球化学研究所深部物质科学实验室的科研人员,采用不同的方法,用高温超高压实验技术模拟地球深部条件,借以了解地球深部的物质运动,实际上也是以有限度的局部模拟代替钻探。综观当今许多科学家对地球深部的研究,尚缺乏采用严密的数学工具对地心内部运动进行整体描述,借助数学与物理统一的自然规律认识地球深部,从而揭示地球表面的重要物理现象之谜。地球表面待解的重要物理现象莫过于地磁、地震和板块移动,而这些现象又是互相关联的。1994年8月在加拿大举行了以“地球深部内核的研究”(SEDI)为题的国际学术讨论会。在这次会议中,对地磁场有这样的评述:“地磁场是最直接联系地球深部的物理现象,这是毫无疑问的。”美国在1992年3月举行了以“国家地磁倡议”为题的学术讨论会,并在1993年出版了学术论著《National Geomagnetic Initiative》,提出了地磁领域的关键问题,包括:

(1)地球磁场究竟是怎样产生的?

(2)为什么地球生成两个磁极,分别各靠近地球南极和北极?

(3)为什么地球磁极的位置不时地发生飘移?

(4)为什么在漫长的地球年代里,地球磁轴的极性呈周期性反转?

应用广义泊松方程对地磁进行研究,发现地磁的产生机理属于涡旋场的范畴。地磁不是如物理学中曾被有些学者提出的假想磁棒和磁荷所能予以解释的。根据广义泊松方程的数学规律,得到了等效磁荷密度和电流密度矩等的全新概念和结果,对地球深部的运动、地磁极的产生、磁极飘移以及地磁轴极性的反转等科学界关注的焦点问题,都可获得清晰的阐释和解答。本书将在第 6 章中详细论述。

第2章

含旋涡和源头的一般矢量场

§ 2.1 从给定的旋度函数和散度函数构造矢量场

本节从两个方面进行探讨:其一是给定矢量场的旋度函数和散度函数,矢量场的空间分布如何;其二是用什么样的方法可以构造出具有指定旋度函数和散度函数的矢量场。关于前者实际上是求解 $\nabla \times \mathbf{E} = \boldsymbol{\omega}, \nabla \cdot \mathbf{E} = P$ 型方程组的问题。这种方程组在历史上的经典解法是利用亥姆霍兹 (Helmholtz) 的矢量场分解法和聂曼 (Neumann) 问题来求解。在这种解法中,把解分为3部分:有旋无散场,有散无旋场和无旋无散场。在求解过程中,需要解4个泊松方程和1个聂曼边值问题。本节从另一途径出发,利用本质不同的旋度函数和散度函数间的转化,找出把给定旋度函数转换为另一散度函数的规律,用这样得到的散度函数修正原来给定的散度,从而建立起一