

偉大數學家的一生

高斯

GARL. F. GAUSS

1777-1855

偉大數學家的一生

高斯

CARL F. GAUSS

1777-1855

高 斯

發行人：曾 蘭 英
發行所：凡 異 出 版 社
登 記：局 版 台 業 字 1596 號
總經銷：學英文化事業有限公司
經 銷：六 藝 圖 書 中 心
地 址：新 竹 市 光 復 路 980 號
電 話：0 3 5 - 7 1 6 7 5 3
郵 撥：0 1 1 4 2 2 1 - 5

中華民國七十五年七月三版 定價 110 元

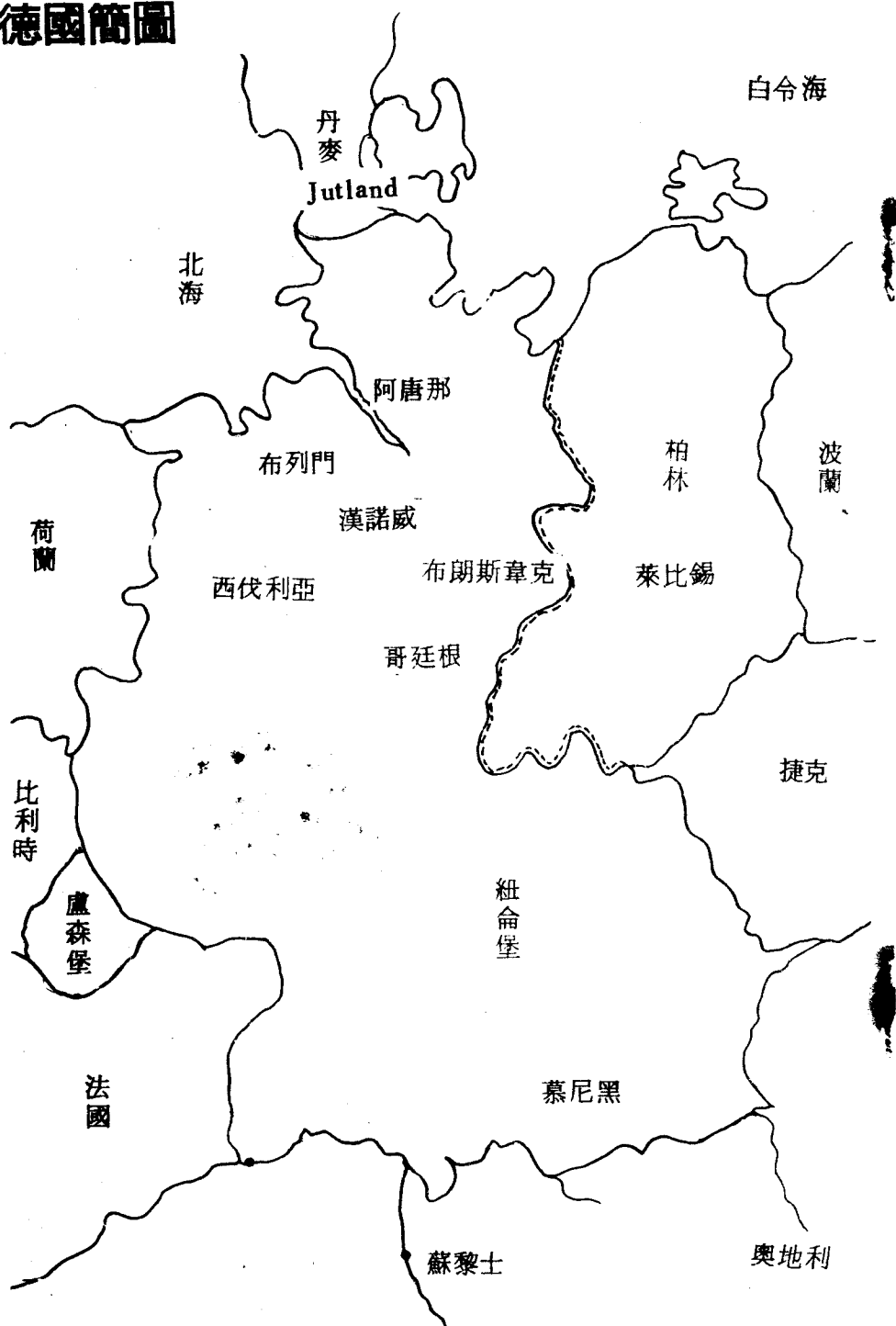
S8805 / 17 (中 1-10 / 49)

高 斯 《偉大數學家的一生》

第 3 版

BC000250

德國簡圖



序

就像獅子號稱萬獸之王，高斯在數學家之林中稱王；他有一個美號“數學王子”

在十八歲初次嶄露頭角的時候，他就已爐火純青，而且以後的五十年間他一直維持着這樣高度的水準。純粹數學或應用數學的所有領域，他都做得得心應手；他處理過數論、代數、函數論、微分幾何、機率論、天文學、力學、測地學、水工學、電功學、磁學、光學等等。

由於他研究工作涵蓋之廣，使他成為十九世紀科學思潮最具代表性的人物。他在曲面論上的研究成果，樹立了建築在一般相對論上的二十世紀思想的基石。

通常只有阿基米得和牛頓和他相提並論。現在阿基米得和牛頓的理論已經有好一段時間成了中學的課程，或多或少看成常識了；然而一般高中學生對高斯的數學却仍遙不可及，甚至於在大學的普通課程中也談不到。他在應用數學方面的貢獻，也是相同的情況。

雖說如此，但並非全無可能利用比較簡單的方式，使比較多的讀者能夠看到高斯作品中形形色色的基本理念。他在“算學講話”一書中所談的質數、同餘的概念，就不要特別的預備知識；有關非歐幾何的一般觀念也是這樣的。尤其就後者而言，以前完全沒有概念反而更好。當然了，其他某些情況，確實沒有辦法克服障礙，以便粗淺地介紹給大眾。

有一個辦法是寫一本高斯傳但不談他的數學，但這麼做的話，就像寫貝多芬傳而不講他的音樂一樣滑稽。所以，我不逃避數

學方面專門性的東西，但我儘量少提；至於完整確實的證明顯然已超出本書範圍。對於高斯最主要的成果，我先列出問題的形式，談一點它們的起源，然後以實例來說明。我也闡釋了高斯工作的方法以及他自我要求的準則。

無論怎麼說！從高斯論文集中摘選出來的區區題材，只能說是個人的偏好；因為那本集子是花了十個數學專家，從 1863 至 1933 計七十年才編撰完成的。

1965 年一月識於 Uppsala

Tord Hall

譯者的話

有人在巴黎街頭問當地人：“為什麼貴國在歷史上出了這麼多偉大的數學家呢？”

巴黎人回答：“我們最優秀的人讀數學”

又去問法國數學家：“為什麼貴國的數學一直享譽國際呢？”

數學家回答：“數學是我們文化傳統中最優秀的一部分。”

「高斯 偉大數學家的一生」是在一個偶然的機會，由幾位平常在一起的朋友促成的。

身為數學從業者，我們肩負着沈重但榮耀的使命；中國在不久（就說是兩百年）之前，一直是世界數學發展中最為舉足輕重的角色，而今天我們要重振威風。雖說大家的努力已經邁進了一大步，但若不屑回過頭來，看一下過去的兩百年間，偉大的數學家在想些什麼，在做些什麼，而當時的社會又是如何孕育，接納他（它）們的話，我們總無法跨越這一道兩百年黑暗的鴻溝。

「高斯 偉大數學家的一生」能不能給我們一點光，幫我們找一個方向呢？

由於高斯的才氣無雙，他的思維是如此的深入，而他所涵蓋的又是如此的廣泛，所以即使這只是一本適應廣大讀者之介紹性書籍，我們還是一共邀集了八位大學教授（包括純數、應數及物理）協力工作，以期達到盡善盡美的地步。爲了讀者的方便，我們增附了德國地圖，名詞索引及附錄。

在整理定稿之前，還發生了一段插曲值得向讀者交代，那就是我們對原著有兩處疑惑百思不解，一個是地理上的，另一個則是歷史上的。我們在德國地圖上怎麼也找不到 Altona（阿唐那）

這個地方，但它却在書中出現了好多次；另外我們也不明白爲什麼道地的德國城市哥廷根會歸英國皇帝管轄。很幸運地，後來我們知道 Altona 就是今日的漢堡，而管轄哥廷根的英皇喬治，原爲德國王子，因爲是英國王室的近親，當安妮女皇沒有子嗣繼承王位時，就被請去兼任英國皇帝了。

現在就讓各位打開第一頁吧！並請多多給我們批評與指教。

六十六年七月二十五日

田光復 • 朱建正 • 呂輝雄 • 林聰源
許世雄 • 曹亮吉 • 曾俊宏 • 顏晃徹

目 錄

序	i
譯者的話	iii
一、家世與環境	1
二、孩提時代	3
數學神童．上學． <u>費廸南</u> 公爵成了贊助人．最初的獨立研究．質數及有關質數分佈 <u>高斯</u> 的猜測．	
三、大學時代	19
正十七邊形．雜記． <u>高斯</u> 的數學結果在此宣布．與 <u>沃漢</u> ． <u>波利艾</u> 的友誼．代數基本定理．嚴密學派的 <u>高斯</u> ．算學講話．一般同餘與一次同餘．二次同餘式．二次形式．分圓．星期幾問題的解答．	
四、天文學	57
確定 <i>Ceres</i> 小行星之軌道．天體運動學．	
五、結婚與升等	65
<u>高斯</u> 升任教授．他的第一次婚姻．公爵之死． <u>高斯</u> 夫人之死．他的再婚．	

- 六、觀察誤差與機率計算 71
最小二乘法．與樂強何爭先．常態分佈法則．誤差曲線．
- 七、測繪地圖 81
漢諾威郡之三角化．Heliotrope．
- 八、曲面論 87
曲面之內稟幾何．曲面方程式之參數表示法．平面曲線及空間曲線之曲率．高斯曲率．不變量．測地三角形．結論之推廣．
- 九、非歐幾何 101
高斯在非歐幾何學上的結果．約翰·波利艾．尼可雷．羅拔契夫斯基．非歐幾何及曲面上的例證．高斯測量 Hohenhagen - Brocken - Inselsberg．
- 十、高斯在物理方面的研究工作 119
有線電報．物理量的絕對單位系統．幾何光學．毛細現象．最小約束運動原理．
- 十一、函數論與算術剩餘 125
阿貝爾和雅可比．算術—幾何平均．橢圓函數．解析函數．無窮級數．位勢論．四次與三次剩餘．費瑪大定理．
- 十二、高斯的其他傳略 141
他的兒女們．高斯在數學圈外的生活．晚年．論文集．爲師．總結．

附錄	157
參考書目	167
名詞索引	169

— 家世與環境

無論從家世或小時候的環境，我們一點都不能預見高斯日後終其一生將從事的工作。在父系方面高斯的先祖只是布朗斯韋克（Braunschweig，現為西德的一部分）地方的自耕農、佃農等勞動階級。他們為生活而辛勤地工作，沒有什麼餘暇可以從事其他的活動。母系方面的經濟及社會地位一般而言要好一些；他們之中有牧師、富農、泥瓦匠及教會裏或社會上的要人。所以常有人說高斯的天分是從母親那方面遺傳來的。但牧師、泥瓦匠或神職人員，甚至他父親之善於計算，都不足以說明為什麼會產生高斯這樣的天才。我們只好承認我們沒有辦法解釋高斯的才氣是否遺傳來的。

早先，高斯這個姓有各種拼法，他的祖父叫做 Jurgen Goos，於 1739 年在布朗斯韋克公國的都城（與公國同名）定居下來。他的父親 Gebhard 生於 1744 年，而將姓氏改成了 Gauss。Gebhard 是個萬事通，做過石匠、運河工人、花匠等等，由於辛勤工作，終於成為威廉街 30 號的房主——這幢房子是 Jurgen 以抵押的方式在 1753 年買下來的。由於 Gebhard 既會算又會寫，所以管理過一個喪葬基金的財務。

Gebhard 的元配在 1775 年死了。第二年他又續弦，娶了 1743 年出生的 Dorothea Benze。這次婚姻只有一個孩子，他就是本書的主人翁 Johann Friedrich Carl Gauss（以下簡稱高斯）。他於 1777 年 4 月 30 日在威廉街上的那幢房子裏出生。這幢房子後來變成博物館，但在第二次大戰的空襲中被炮火毀掉了。

高斯的外祖父Kristoffer Benze是布城郊外叫做Velpke的小村莊裏的泥瓦匠。因為他經常在沙岩裏工作，所以得了肺病，30歲時就死了。Dorothea的弟弟Johann Friedrich很有天分，也很有獨到的見解。他自己摸索而變成一個很好的織緞人材。當他在1809年去世的時候，高斯對人說世界上已經少掉了一個天才。因為高斯小時候和他的母親很親近，所以他對舅舅的看法也許是主觀了點。用現在的術語來說，他舅舅也許是一個埋沒了的天才。

高斯的母親不會寫而且也幾乎不會讀。但她的智慧高，有幽默感，而且個性很強。她最關心的就是高斯。在她生命最後的二十二年期間，都和高斯一起住在哥廷根的天文台旁（高斯是天文台長）。她以97歲高壽仙逝於1839年。高斯的父親則於1808年亡故；他的晚年雖然經濟上沒有問題，但實在也沒有富有過。

1810年高斯寫信給Minna Waldeck（她後來成為高斯的第二任妻子）的信中曾提起他的父母：「我父親非常忠厚，許多方面都值得別人敬重；但在家裏他非常專制、粗魯、暴虐……。當我還是小孩子的時候，我對他就不全有信心，但這也不會使我們決裂，因為我很早就不靠他了。」

我的母親生於布城外五十公里處，她在那裏做了幾年的女僕，於1776年和我父親結婚。除了我以外，她沒有生育其他的孩子。她的婚姻生活並不愉快，這都是因為週遭環境的關係，以及我父母間個性不能調和的緣故。她是個非常善良的女性，我非常敬愛她。」

二 孩提時代

數學神童

在偉人的傳記或自傳裏，通常總有一些值得注意的傳聞軼事，它們總是用來說明這些偉人從小就有過人之處。這些名人軼事通常都採自行雲流水性的回憶，再加上“想當然耳”似的加油添醋，拼湊而成定型。數學、音樂、棋藝等方面的神童，尤其常有令人難以置信的故事。

高斯，一個數學神童，是各式各樣的天才裏最出色的一個，但本質上這並不重要，故事的第一手資料常來自高斯本人——他在晚年時總喜歡談他小時候的事，當然，從挑剔的眼光來看，我們會懷疑這些故事的真實性，但許多人都證實了他所談的故事。無論如何這些故事本身就很有趣。

夏天裏，高斯的父親做泥瓦廠的工頭。每星期六他總是要發薪水給工人。有一次，當他正要發薪水的時候，小高斯站了起來說道：「爸爸，你弄錯了。」然後他說了另外一個數目。原來三歲的小高斯趴在地板上，一直暗地裏跟著他爸爸計算該給誰多少工錢。重算的結果證明小高斯是對的，這把站在那裏的大人都嚇得目瞪口呆。

高斯常帶笑地說：他在學講話之前就已學會計算了，還常說他問了大人字母如何發音後，就自己學著讀起書來。

上學

七歲時高斯進了 St. Catherine 小學。他的老師是 J. G.

Buttner (布特納) 在龐大的教室裏，天花板顯得低矮，老師手拿著教鞭，在凹凸的地面上來回走動，管教將近一百個小學生。那時候，教鞭是管教學生最好的工具，不知道是出於需要或者是脾氣使然，布氏經常使用教鞭。高斯在這種氣氛之下過了兩年而却絲毫沒有不良的影響。

大約在高斯十歲的時候，布氏在算術課上出了一道難題：「把從 1 到 100 的整數寫下來，然後把它們加起來！」每當有考試時，他們有如下的習慣：第一個做完的就把石板（當時通行，寫字用）面朝下地放在老師的桌子上，第二個做完的就把石板擺在第一張石板上，……就這樣一個一個落起來。這個難題當然難不倒學過算術級數的人，但這些孩子才剛開始學算術呢！布氏心想他可以休息一下子了。但他錯了，因為還不到幾秒鐘，高斯已經就把石板放在講桌上了，同時說道：「答案在這兒！」其他的學生把數字一個個地加起來，額頭都出了汗水，但高斯却靜靜地坐著，對老師投來的、輕蔑的、懷疑的眼光毫不在意。

考完後，老師一張張地檢查著石板。大部分都做錯了，學生就吃了一頓鞭打。最後，高斯的石板被翻了過來，只見上面只有一個數字：5050。（用不著說，這是正確的答案。）老師吃了一驚，高斯就解釋他如何找到答案： $1 + 100 = 101$ ， $2 + 99 = 101$ ， $3 + 98 = 101$ ，……， $49 + 52 = 101$ ， $50 + 51 = 101$ ，一共有 50 對和為 101 的數目，所以答案是 $50 \times 101 = 5050$ 。由此可見高斯找到了算術級數的對稱性，然後就像求得一般算術級數和的過程一樣，把數目一對對地湊在一起。說得清楚些，我們把這個算術級數從頭到尾，從尾到頭各寫一遍

$$1 + 2 + \dots + 99 + 100$$

$$100 + 99 + \dots + 2 + 1$$

然後把對應項加起來，就得到 100 個 101。因為這是答案的兩倍大，所以答案是 $50 \times 101 = 5050$ 。

這事件的意義非比尋常。終其一生，高斯總是靜靜地把答案寫下來，不留一點計算的痕跡，而且對答案的正確性有絕對的把握。就像布特納一樣，許多學者希望高斯能夠詳細解說答案，但高斯總是覺得那是多餘的。

這事件同時也是高斯一生的轉捩點。布氏馬上就瞭解到他再也不能教高斯什麼了。他從漢堡郵購了一本較高等的算術課本讓高斯研讀。同時，高斯和布氏的助教Martin Bartels（巴佗）來往密切。這對高斯來說是一大幸運，因為時年十八的巴佗比布氏更能瞭解和幫助高斯（巴佗後來成為大學數學教授）。

布特納和巴佗（或是其中的一個）訪問了高斯的父親Gebhard，談及高斯的教育問題。Gebhard在家裏是專制慣了的，他認為兩個孩子都該繼承他自己的衣鉢；事實上，前妻所生的大兒子就走了他的老路子。Gebhard非常不情願去讓高斯接受更高的教育；何況，他也不知道如何去籌足夠的金錢做這件事。布特納和巴佗回說：「我們一定能夠找到一個有錢有勢的人來贊助這樣的天才。」這是當時社會流行的一種辦法，而且也是唯一有希望的辦法，雖然他們並不知道到那裏找這樣的贊助人。這次訪問的結果使Gebhard妥協了點。前此，每天晚上高斯都要織一定量的亞麻布，現在織布機不見了——據說被Gebhard當材火燒掉了，換上來的是一堆書本。高斯和巴佗經常坐着討論數學問題直到深夜。不久以後，巴佗也沒有什麼東西可以教高斯的了。

1788年高斯不顧父親的反對進了故鄉的Catharineum高等學校。看了高斯的第一次數學作業後，數學老師認為天分這麼

高的高斯實在沒有必要再上他的課了。同時，在巴佗及語言學家 Meyerhoff 的幫助之下，高斯在古典語言學的成就不久就凌駕同班同學之上了。

費迪南公爵成了贊助人

經過巴佗的介紹，高斯認得了卡洛琳學院（Collegium Carolinum）的教授 Zimmermann（勤摩曼），再由勤摩曼的引介，高斯才得以晉見布朗斯韋克公爵費迪南。晉見的情形非常順利，公爵答應儘全力資助（從 1791 年開始）。公爵的眷顧馬上贏得羞澀的高斯的信任與獻身。高斯其時年方一十四。

用這種封建式的方法解決了經濟上的問題後，高斯的父親再也不會反對高斯繼續深造。高斯於 1792 年到 1795 年期間在卡洛琳學院求學。1796 年，當高斯第一次發表科學論文（關於正十七邊形作圖的問題）時，勤摩曼教授為高斯寫了序。其中有句話說：「在布朗斯韋克這裏，高斯獻身於哲學與文學的研究，其成就與其在高等數學的貢獻等量齊觀。」

最初的獨立研究. 質數及有關質數分佈高斯的猜測

一個成熟的數學家在作任何研究貢獻之前，必須先熟知前人已經知道的結果。他可以讀教科書或就教於某個老師，或者自己動腦筋想來達成此目標。在高斯小時候，他能讀到的教科書或就教的老師都很有限。由於他有天分，因而大部分的數學知識都是他自己動腦筋得來的。因此，他常常自己發現了別人早已知道的定理，譬如算術級數和的公式就是一個例子。

就像其他的孩子一樣，高斯首先碰到的數學就是對自然數 1, 2, 3, 的探討。1, 2, 3, 這些自然數看起來簡單，但却藏著許多數學難題，有許多難題是有關於質數的。在討論高斯在這方面的貢獻之前，我們先談一些定義及大家熟知的事實。