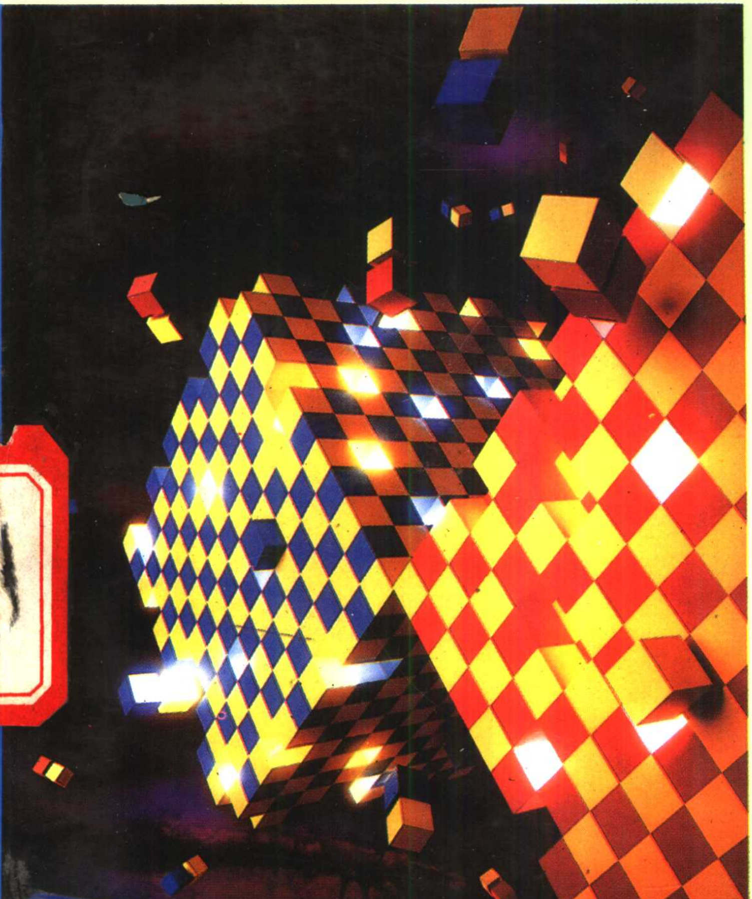
计算的复杂性

COMPLEXITY THEORY OF NUMERICAL METHODS

走向数学丛书

王则柯 著



走向数学丛书

计算的复杂性

王则柯　著

湖南教育出版社

计算的复杂性

Complexity Theory of Numerical Methods

Numerical Methods

王则柯 著

Wang Zeke

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行（东风路附1号）

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷二厂印刷

787×1092毫米 32开 印张：3.75 字数：80000

1993年4月第1版 1993年4月第1次印刷

ISBN 7—5355—1579—7/G·1574

定价：3.00元

“走向数学”丛書

陳省身題

前　言

王　元

从力学、物理学、天文学直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学. 一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三、四年有数学课. 可见数学之重要与其应用之广泛.

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏. 我以为要克服这个鸿沟，还是有可能的. 近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握. 我想，如果知道讨论的对象的具体背景，则有可能掌握其实质. 显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到. 若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了解. 这就促使我们设想出一套"走向数学"小丛书，其中每本小册子尽量

用深入浅出的语言来讲述数学的某一问题或方面，使工程技术人员，非数学专业的大学生，甚至具有中学数学水平的人，亦能懂得书中全部或部分含义与内容. 这对提高我国人民的数学修养与水平，可能会起些作用. 显然，要将一门数学深入浅出地讲出来，决非易事. 首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解. 从整体上说，我国的数学水平还不高，能否较好地完成这一任务还难说. 但我了解很多数学家的积极性很高，他们愿意为"走向数学"撰稿. 这很值得高兴与欢迎.

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社支持，得以出版这套"走向数学"丛书，谨致以感谢.

前　言

数值计算的复杂性理论，在 20 世纪 80 年代取得了若干重要进展，引起了人们的注意．这一进展既发生在应用数学领域，又植根于纯粹数学的深层，令两方面的数学家都十分关心．

本书力图以浅显易懂的语言，准确地向读者介绍数值计算复杂性理论的重要进展．斯梅尔教授的开创性工作，是全书的重点．

第一章以易学易做的不动点迭代为引子，说明收敛性（算法是否成功）和复杂性（计算效率如何）的关系，着重阐明为什么“多项式时间算法”那么重要．这一章，是基本概念的准备．第二章专写中学生可以完全看懂的库恩算法及其复杂性讨论的结果．这一章多写一些完全值得，因为这是当代前沿研究中罕见的可以讲得相当浅白的工作．第三章阐述斯梅尔关于牛顿算法的复杂性研究的开创性工作，以及他的工作对复杂性理论的深远影响．第四章介绍线性规划问题的意义，算法研究和复杂性讨论两者相得益彰的发展，这是十年来复杂性讨论中最引人注目的论题．这一章的最后，还简单谈谈复杂性讨论的学科环境：应用问题向几何学、拓扑学、代数几何、积分几何与

几何概率、单叶函数理论等方面寻求工具.

这么重大的进展，如此丰富的内容，不可能在这样一本小册子中完整论述.笔者牢记为具有中学数学基础的数学爱好者写作的宗旨，务必保证他们可以看懂大部分内容，在有些地方精心制作粗线条的描述，不失为一种好的处理.实际上，这对作者也是一次考试.但我们明确重在阐明和揭示数学思想，这是数学创造的真谛.一些若仔细论证则难免繁难的地方，就代之以粗线条的和力求准确的定性说明.书中还穿插若干有趣的科学故事，读者定会从中得到启迪.

作为一本高层次的科普著作，我们不准备采用专著的撰写形式.除了正文的写作将具有上一段明言的特点以外，我们也不详列参考文献和名词索引.对于希望深入了解数值计算复杂性理论的进展和内容的读者，我们仅列以下中文书籍：中山大学出版社 1986 年出版的《单纯不动点算法基础》，科学出版社 1989 年出版的《代数方程组与计算复杂性理论》，重庆出版社 1990 年出版的《同伦方法引论》，以及国防工业出版社 1991 年出版的《拓扑理论及其应用》.这些著作中指出了重要的原始文献.但是必须再一次强调，以上著作只是进一步专门阅读的建议，而不是对读者的要求.本书除了希望读者具有良好的创造思维以外，只要求读者具备运用中学数学进行思考的能力.

最后我们指出，本书与计算机科学的复杂性理论不同，完全不谈可计算性、二进制、图灵机和人工智能.具体地说，我们假定读者从未接触过电子计算机.当然，计算机科学的复杂性理论和本书所写的数值计算的复杂性理论，二者有深刻的联系，我们设想在条件成熟的时候，深刻的联系会在一些读者的头脑中油然自生.

“走向数学”丛书的组织与出版，是具有深远影响的工程.

在中学数学的基础上，用现代观点向高中生，中学教师、大学低年级学生，工程技术人员和数学爱好者介绍数学的一些创造思想，使大家真正地认识数学，了解数学，热爱数学，走向数学，是一种很有意义的工作.

在师长和同道的鼓励和鞭策之下，笔者承担了本书的写作任务. 笔者学识陋浅，虽兢兢业业写作，谬误亦恐难免，诚望读者批评指教，不负数学为用之美.

江泽涵教授从特例入手的研究方法，吴文俊教授对构造性数学和计算机的兴趣，都很使笔者受益. 谨以此书的写作，献给两位敬爱的老师.

王则柯谨识

1990年夏于中山大学岭南学院

目　　录

第一章　数值计算的复杂性问题

复杂性(complexity)作为一个科学名词出现，是最近20年的事. 这也是在《数学百科辞典》和《简明不列颠百科全书》中找不到“复杂性”条目的原因.

复杂性的科学研究，有漫延的趋势. 例如，新近已经有人讨论碎形几何 (The geometry of fractal sets) 集合的复杂性问题. 不过，已经成大气候的却还只限于两个方面：计算机科学的复杂性理论和数值计算的复杂性理论.

读者听说过二进制数、图灵机、递归函数和人工智能，这些内容都属于理论计算机科学复杂性讨论的范围. 粗略地说，计算机科学的复杂性讨论，是有关机器（指计算机）原理、功能和机器设计的讨论. 数值计算的复杂性讨论，则主要是数值计算方法的效率和数值计算方法的设计的讨论. 当然. 两种复杂性讨论之间存在着深刻的联系，它们都是电子数字计算机蓬勃发展和广泛应用的产物. 但是，它们之间又有明确的界限. 例如，为了研究计算方法的复杂性问题，你不必知道多少机器的原理，但是要研究计算机科学的复杂性问题，非得精通机器的

原理不行. 现代的数值计算，当然离不开计算机. 但是，使用机器和了解机器的原理，毕竟是两回事. 现在计算器已经很普及，人人都会用，然而这些人多半不知道也不关心它的运行原理. 在这个意义上，可以说数值计算的复杂性讨论，研究的是如何更好地利用机器进行数值计算的问题.

本书的宗旨，是在中学数学的基础上，向读者介绍数值计算复杂性讨论的思想和进展. 复杂性讨论的应用性很强，但是读者将会看到，纯粹数学中原先被认为是很抽象的一些理论，在这个应用科学的研究中表现出强大的生命力.

我们从最简单的例子开始，深入浅出地叙述数值计算复杂性讨论的思想和进展. 个别细述难免繁难的地方，则代之以粗线条的定性说明. 文武之道，一张一弛. 书中还穿插若干有趣的科学故事.

§1 代数方程的不动点迭代算法

为了说明数值计算的复杂性问题，我们先介绍一种特殊的计算方法——代数方程的不动点迭代方法. 这种方法一学就会.

中学数学讨论得最多的代数方程是形如

$$ax^2+bx+c=0,\quad a\neq 0$$

这样的一元二次方程，它的两个根可以按照

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

这个求根公式算出来. 这种把代数方程的根用方程系数经有限次加、减、乘、除和开方运算表示出来的方法，叫做代数方程的**代数解法**.

爱好数学的读者知道，三次方程和四次方程也是有代数解法的，只是中学里一般不学罢了．但是，数学家已经证明，五次方程和更高次的方程，就找不到普遍适用的代数解法．这就是说，不会有用方程系数经有限次加减乘除和开方运算把方程的根表示出来的公式．这种“无公式解”的本性，是和五次以下的方程不同的．由于这个原因，在本书中，以后我们只把五次和高于五次的代数方程叫做高次方程．

高次方程虽然没有普遍适用的代数解法，但是却有一些非代数的或者说非公式的解法．这一节，先介绍高次方程的不动点迭代解法．

代数方程都可以表示成

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,\quad a_0\neq0,$$

这里 $f(x)$ 是一个 n 次多项式. 如果能够把方程

$$f(x)=0$$

改写成

$$x=\varphi(x)$$

的形式，并且能够找到一个 x^* 使得

$$x^*=\varphi(x^*),$$

那么，x^* 就是原代数方程的一个解.

把方程 $f(x)=0$ 改写成 $x=\varphi(x)$ 的形式，非常容易，也有许多方式. 例如，可以写成

$$x=-a_0x^n-a_1x^{n-1}-\cdots-(a_{n-1}-1)x-a_n,$$

这时 $\varphi(x)=-a_0x^n-a_1x^{n-1}-\cdots-(a_{n-1}-1)x-a_n,$

也可以写成

$$x=-\frac{a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{a_0x^{n-1}},$$

这时，右端的分式函数就是所说的 $\varphi(x)$. 因为 $x=\varphi(x)$ 是从 $f(x)=0$ 变形来的，所以新方程的解就是原方程的解.

x^* 是新方程的解，就是说 $x^*=\varphi(x^*)$. 请看函数 $\varphi(x)$. 一个函数，就表示一个对应，或者说表示一个变换. 函数 φ 是把 x 变成 $\varphi(x)$ 的对应. 现在 $x^*=\varphi(x^*)$，就是说函数 φ 把 x^* 变成 $\varphi(x^*)=x^*$ 自己，换一个说法，就是 x^* 经过 φ 这个变换没有动. 由于这个原因，使得 $x^*=\varphi(x^*)$ 的点 x^* 叫做函数 φ 的**不动点**，形如 $x=\varphi(x)$ 的方程，也就叫做**不动点方程**.

从上面可以看出，把代数方程改写成不动点方程是容易的，难的是怎样得到不动点 x^*. 为此，我们采用**迭代**办法：找一个点记作 x_0，代入函数 φ，得到 $\varphi(x_0)$，记作 x_1，再代入 φ，得到 $\varphi(x_1)$，记作 x_2，……如此一直做下去，可以得到一个序列

$$x_0, x_1, x_2, \cdots,$$

其迭代关系可以表示成

$$x_{n+1}=\varphi(x_n), \quad n=0,1,2,\cdots$$

有趣的是，这个迭代序列有时候可以帮助我们找到所要的不动点. 这就是**不动点迭代方法**.

先试一试.

考虑 5 次方程

$$x^5-17x+2=0,$$

首先把它变成一种不动点方程：

$$x=\frac{x^5+2}{17}\equiv\varphi(x),$$

这里的≡表示 $(x^5+2)/17$ 就是 $\varphi(x)$. 选 $x_0=0$ 进行迭代，得

$$x_1=2/17=0.117647,$$

$$x_2=(0.117647^5+2)/17=0.1176483,$$

$$x_3=(0.1176483^5+2)/17=0.1176483,$$

$x^* = 0.1176483$ 就是 φ 的一个不动点，所以是原 5 次方程的一个解.

熟悉这方面内容的读者可能先已看出，2 是原 5 次方程的一个解. 但是如果你不懂迭代法，或者虽然懂但是不去做，就无论如何看不出 0.1176483 这个解.

这个迭代过程要算 5 次方，好在一般计算器都有这个功能. 所以，每次迭代只是按几下键的事情，这是科技发展给我们带来的好处. 有些同学只喜欢推理，不喜欢计算，更不喜欢小数点，认为计算没有多少学问. 其实，计算和迭代都有深刻的学问. 许多重大的科学现象，都是在计算机帮助下发现的. 美国物理学家菲根鲍姆"玩"计算器入了迷，为开创混沌理论作出了重大贡献，就是生动的例子. 小小计算器空有许多功能而我们不去利用，岂不可惜?

刚才，我们选 $x_0=0$ 开始迭代，获得成功，这是不是巧合? 是不是接受了什么暗示? 提出怀疑是完全合理的，应当多做几次试验. 下面，分别从 $x_0=1$，$x_0=-1$，$x_0=2$，$x_0=-2$ 开始迭代，把 4 个迭代序列记录在一张表上：

n	x_n	x_n	x_n	x_n
0	2.0	1.0	−1.0	−2.0
1	2.0	0.1764705	0.0588235	−1.7647059
2		0.1176571	0.1176471	−0.8890822
3		0.1176483	0.1176483	0.0849686
4		0.1176483	0.1176483	0.1176473
5				0.1176483
6				0.1176483

到现在为止，5 个迭代序列都是成功的，一共找到 2 个解. 下面，再扩大范围试试，从 $x_0=3$ 和 $x_0=-3$ 开始迭代，数据如

下表：

n	x_n	x_n
0	3.0	-3.0
1	14.411765	-14.176471
2	36571.122	-33681.402
3	3.84806×10^{21}	-2.5497×10^{21}

不必再算下去就可以判断，这两个序列都是没有极限的．迭代公式是 $x_{n+1}=\varphi(x_n)=(x_n^5+2)/17$．当 x_n 已经很大时，x_n^5 就会非常大，最后除以 17，仍然保持很大．所以，从 $x_0=3$ 开始的迭代跑向 $+\infty$，从 $x_0=-3$ 开始的迭代则趋向于 $-\infty$，它们都不收敛．这时，我们也说这样的迭代序列发散．

这一节开头说过，不动点迭代方法一学就会．的确，现在你已经会了．但是我们没有说会做迭代就保准迭代成功．迭代是否成功，怎样使迭代成功，正是数值计算的复杂性要讨论和研究的问题．

为了进一步把上述迭代的情况研究清楚，可以画一张迭代收敛图帮助我们分析．

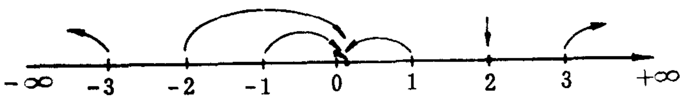


图 1.1

图 1.1 标明了前面所做的 7 个迭代过程的结果，1 个迭代驻守在 2 这个不动点，4 个迭代收敛到 0.1176483，另外 2 个迭代分别向 $+\infty$ 和 $-\infty$ 发散．这个图启发我们提出进一步的问题：

（1）从 -3 开始的迭代发散，从 -2 开始的迭代收敛．-3