代 数 学

II

〔荷〕B. L. 范德瓦尔登 著

科 学 出 版 社

代　数　学

II

〔荷〕B. L. 范德瓦尔登 著

曹锡华　曾肯成　郝钢新 译

万哲先 校

科 学 出 版 社

1 9 7 8

内 容 简 介

全书共分两卷，涉及的面很广，可以说概括了 1920—1940 年左右代数学的主要成就，也包括了 1940 年以后代数学的新进展，是代数学的重要著作之一．本书是第二卷．在这一卷中第十一章讨论了单变量代数函数的理论．第十二章讨论同时带有拓扑结构的各种代数系统．以下三章为理想理论，包括诺特（Noether）环中一般理想理论、多项式环及代数整量的理论．最后三章为线性代数、结合代数和环的结构，以及群与代数的表示理论．

B. L. Van der Waerden

ALGEBRA

II

Springer-Verlag, 1959

代 数 学

II

〔荷〕B. L. 范德瓦尔登 著

曹锡华 曾肯成 郝钢新 译

万哲先 校

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1976 年 11 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1978 年 9 月第二次印刷 印张：11 1/2 插页：2

印数：45,271—111,070 字数：263,000

统一书号：13031·470

本社书号：703·13—1

定价： 1.20 元

第四版前言

第二卷的开始增添了新的两章. 一章叙述单变量的代数函数,直到得出任意常量域上的黎曼-罗赫 (Riemann-Roch) 定理;另一章讨论拓扑代数, 主要考虑拓扑群、环与体的完备化, 以及局部有界和局部紧体的理论. H. R. 费谢尔 (Fischer) 博士先生审慎地阅读了这二章的手稿, 作者对他所提出的许多有益的意见表示感谢.

“一般理想论”一章中收进了克鲁尔(Krull)关于素理想的形式幂及素理想链的重要定理,从而作了扩充.

在“代数整量”一章中把整闭环中理想论与赋值论的关系表达得更清楚了. 在“线性代数”一章中增加了关于反对称双线性型的新的一节(§ 140).

“代数”一章中例子增多了. 按照雅各布森 (Jacobson) 的方式不附加有限条件发展了根的理论. 更强调了 E. 诺特 (Noether) 关于模的直和与直交的观念. 将雅各布森的方法与 E. 诺特的方法相互结合起来,可以大大地简化几个主要定理的证明.

为了更易于理解起见, 重新改写了表示论一章中 § 163—165 诸节.

作者力图通过精简使得本书的篇幅不超出一个可容许的限度, 因此删去了消去法论一章. 关于齐次方程的结式的存在定理, 过去是通过消去法来证明的, 现在在 § 121 中作为希尔伯特 (Hilbert) 零点定理的一个推论而出现.

作者感谢 W. 班德勒(Bandler), J. J. 伯克哈特(Burckhardt)博士, H. 格罗斯(Gross)和 H. 凯勒(Keller)博士诸位先生, 他们在校订手稿及阅读校样中给予宝贵的帮助.

B. L. 范德瓦尔登

苏黎世 1959年6月

目　　录

第十一章　单变量代数函数

复数域上的代数函数古典理论以有了黎曼-罗赫 (Riemann-Roch) 定理而达到高峰. 对这个定理有函数论的、几何的和代数的证明方法. 在 C. 若当(Jordan)所著"分析教程 II" (Cours d'Analyse II) 的第八章中可以找到运用几何思想的函数论证明方法的一个美好表述. 在几何证法方面, 塞弗里 (Severi) 的快速方法[1]特别值得提出. 由戴德金 (Dedekind) 和韦伯 (Weber) 所给出的纯代数的证明方法 [*J.reine angew. Math.*, **92** (1882)], 被 E. 诺特 (Emmy Noether) 所简化,而且推广到完全的常数域上. 对于任意常数域, 首先由 F. K. 施密特 (Schmidt) 给出了黎曼-罗赫定理的证明 [*Math. Z.* **41** (1936); 那里还有更多的文献]. A. 魏依 (André Weil) 在 *J. reine angew. Math.*, **179** (1938) 中给出了较简单的证明. 下面我们遵循他的证明.

作为准备, 我们要用到赋值论中的一个一般的定理——**逼近定理**. 这里的证明摘自 E. 阿廷 (Artin) 的讲义.

§83. 逼近定理

下面我们提到"赋值",总是指域 K 上的非不足道赋值. 按§75, 两个这种赋值 φ 与 ψ, 若从 $\lim \varphi(a_\nu)=0$ 总可得到 $\lim \psi(a_\nu)=0$ 而且反过来也成立,则 φ 与 ψ 等价.

---

1) 这个方法的最新表达可参考 F. Severi, *Acta pont. accad. sci.*, 1952. 魏依 (Weil)的证明也受到快速方法的影响,这个证明将在这里表述出.

引理 1. 两个赋值 φ 与 ψ，若从 $\varphi(a)<1$ 可得 $\psi(a)<1$，则 φ 与 ψ 等价.

证. 显然只要证明

$$\psi(a)=\varphi(a)^{\varepsilon}\quad(\varepsilon>0).$$

证明的进行几乎同 § 75 的证明一样.

从 $\varphi(a)<\varphi(b)$ 即得 $\varphi(a/b)<1$，也就得 $\psi(a/b)<1$，因此 $\psi(a)<\psi(b)$. 同样从 $\varphi(a)>\varphi(b)$ 可得 $\psi(a)>\psi(b)$.

现在设 p 为一个使 $\varphi(p)>1$ 的固定元素. 于是 $\psi(p)>1$. 对任意元素 a，令

$$\varphi(a)=\varphi(p)^{\delta},\ \psi(a)=\psi(p)^{\delta'}.$$

我们要证 $\delta=\delta'$. 设 m 与 n 为使 $n/m<\delta$ 的自然数. 于是 $n<\delta m$，又 $\varphi(p)^n<\varphi(p)^{\delta m}=\varphi(a)^m$ 或 $\varphi(p^n)<\varphi(a^m)$. 由开始所述，得 $\psi(p^n)<\psi(a^m)$或

$$\psi(p)^n<\psi(a)^m=\psi(p)^{\delta' m},$$

因此 $n<\delta' m$ 或 $n/m<\delta'$.

同样可证，从 $n/m>\delta$ 可得 $n/m>\delta'$. 因此 $\delta=\delta'$.

再令

$$\varepsilon=\frac{\log\psi(p)}{\log\varphi(p)}.$$

于是对所有 a，

$$\log\psi(a)=\delta\log\psi(p)=\delta\varepsilon\log\varphi(p)=\varepsilon\log\varphi(a).$$

由此得 $\psi(a)=\varphi(a)^{\varepsilon}$，这就是所要证的.

象以前所指出，对每一赋值 φ，就有一极限概念：$\lim a_\nu=a$ 表示 $\lim\varphi(a_\nu-a)=0$. 我们直接可证：

$$\lim\frac{a^\nu}{1+a^\nu}=0,\quad \text{当}\quad \varphi(a)<1,$$

$$=1,\quad \text{当}\quad \varphi(a)>1.$$

引理 2. 设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n (n > 1)$ 为域 K 上有限个互不等价的赋值. 于是存在域元素 a 使

$$\varphi_1(a) > 1 \quad \text{且} \quad \varphi_\nu(a) < 1 \quad (\nu = 2, \cdots, n).$$

这个引理在狄里赫来 (Dirichlet) 的单位定理大多数的证明中起着基本作用[1]. 我们对 n 用归纳法来证明.

首先设 $n = 2$. 这里赋值 φ_1 与 φ_2 不等价. 按引理 1, 存在元素 b, 具有性质:

$$\varphi_1(b) < 1 \quad \text{且} \quad \varphi_2(b) \geqslant 1,$$

又有元素 c, 具有性质:

$$\varphi_1(c) \geqslant 1 \quad \text{且} \quad \varphi_2(c) < 1.$$

于是 $a = b^{-1}c$ 就具有所需的性质:

$$\varphi_1(a) > 1 \quad \text{且} \quad \varphi_2(a) < 1.$$

现设这定理对 $n - 1$ 个赋值是对的, 于是存在元素 b 使

$$\varphi_1(b) > 1 \quad \text{且} \quad \varphi_\nu(b) < 1 \quad (\nu = 2, \cdots, n - 1).$$

由 $n = 2$ 时已证得的结果, 还存在元素 c 使

$$\varphi_1(c) > 1 \quad \text{且} \quad \varphi_n(c) < 1.$$

分两种情况来讨论.

情况 1. $\varphi_n(b) \leqslant 1$. 作 $a_r = cb^r$. 于是

$$\varphi_1(a_r) > 1, \quad \varphi_n(a_r) < 1,$$

且对充分大的 r,

$$\varphi_\nu(a_r) < 1 \quad (\nu = 2, \cdots, n - 1).$$

因此可以取 $a = a_r$.

情况 2. $\varphi_n(b) > 1$. 作

$$d_r = \frac{cb^r}{1 + b^r}.$$

---

1) 参考 B. L. V. D. Waerden, Logarithmenfreier Beweis des Dirichletschen Einheitensatzes, *Abh. Math. Sem., Hamburg*, 6(1928).

序列$\{d_r\}$在赋值 φ_1 与 φ_n 下收敛于 c，在其余的赋值 φ_ν 下收敛于 0．因此

$$\lim \varphi_1(d_r) = \varphi_1(c) > 1,$$
$$\lim \varphi_n(d_r) = \varphi_n(c) < 1,$$
$$\lim \varphi_\nu(d_r) = 0 \qquad (\nu = 2, \cdots, n-1).$$

于是对充分大的 r，$a = d_r$ 就有所需的性质：

(1) $$\begin{cases} \varphi_1(a) > 1, \\ \varphi_\nu(a) < 1 \end{cases} \qquad (\nu = 2, \cdots, n).$$

引理 3. 设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 为互不等价的赋值，则存在域元素 b，在赋值 φ_1 下任意接近于 1，而在赋值 $\varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 下任意接近于 0.

$n = 1$ 的情形是显然的．对 $n > 1$ 的情形，取一个具有性质(1)的元素 a．再作

$$b_r = \frac{a^r}{1 + a^r}.$$

序列 $\{b_r\}$ 在赋值 φ_1 下趋向于 1，而在赋值 $\varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 下趋向于 0．于是就推得这个引理.

有了这些准备之后，现在我们来证

逼近定理．设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 为互不等价的赋值．对给定的域元素 $a_1, \cdots, a_n$，存在域元素 a，它在赋值 φ_ν 下任意接近 a_ν：

(2) $$\varphi_\nu(a_\nu - a) < \varepsilon \quad (\nu = 1, \cdots, n).$$

证．由引理 3，存在元素 $b_\nu (\nu = 1, \cdots, n)$，它在赋值 φ_ν 下任意接近 1，而在所有其余赋值下任意接近于 0．于是和

$$a = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

在赋值 φ_ν 下任意接近 a_ν.

若赋值 φ_ν 是非阿基米德(Archimedes)的，并把它写成指数式：

$$\varphi_\nu(z) = e^{-w_\nu(z)},$$

则(2)式成为

$$w_\nu(a_\nu - a) > N \qquad (\nu = 1, \cdots, n),$$

其中N为任意大的实数.

§84. 按局部单值化元的级数展开

设**K**为单变量代数函数域,即有理函数域$\Delta(x)$的有限扩张. 独立变量x的选择有相当任意性: 可以任选对Δ为超越的元素来代替x. 我们感兴趣的只是不变性质,即不依赖于x的选择的代数函数域的性质.

K中对Δ为代数的元素称为*常量*,它们形成*常量域*Δ^*. 域Δ^**在***K***中是代数闭的*,即**K**中对Δ^*为代数的元素一定在Δ^*中.

当提到函数域**K**的赋值的时候,总是指那样一种非不足道赋值,它在所有非零常量上取值1. 据§80,可以直接看出,所有这些赋值都是非阿基米德的. 把它们写成指数形式

$$\varphi(z) = c^{-w(z)}, \tag{1}$$

其中c为任意>1的实数. 对常量a总有$w(a)=0$.

按§82的意义,域**K**的位是指等价的赋值类. 按§74,对于域**K**的位,相应地有赋值环$\mathfrak{J}$及赋值理想$\mathfrak{p}$. 赋值理想是由零及具有$w(z)>0$的域元素,即满足$\varphi(z)<1$的域元素z所组成. 按§83引理1,具有相同赋值理想$\mathfrak{p}$的两个赋值是等价的. 因此每一赋值理想$\mathfrak{p}$只属于唯一的位. 为了方便起见,我们用同一字母$\mathfrak{p}$表示位及赋值理想.

按假设,域**K**是有理函数域$\Delta(x)$上的有限扩域. 要得到**K**的所有赋值,首先可按§80求出$\Delta(x)$的所有赋值,然后再按§78把这些赋值扩充到**K**上. 在§81中对代数闭的常量域的情形进

行了研究;对一般情形来说，方法是一样的．若给出 $\Delta(x)$ 的指数赋值 w，首先把 $\Delta(x)$ 扩到完备赋值域 Ω，然后再按 § 81 的公式(2)定义 $\mathbf{K}$ 的赋值 W：

$$W(z)=n_v^{-1}w(N(z_v)), \tag{2}$$

其中范数是在 Ω 的适当扩域中对 Ω 作的．对给定的赋值 w，只存在有限多个可能的开拓 W．

按 § 80，$\Delta(x)$ 的赋值 w 是离散的，即存在一个最小正值 w_0，所有值 $w(z)$ 都是 w_0 的倍数．(2)中的 n_v 是域次数 $n=(\mathbf{K}:\Delta(x))$ 的因子，而且所有正值 $W(z)$ 都是 $n^{-1}w_0$ 的倍数，因此赋值 W 也是离散的．

如同 § 82，我们把赋值 $W(z)$ 规范化一下，使 $W(z)$ 的最小正值取作 1．于是所有的 $W(z)$ 都是整数．这样规范化了的赋值只依赖于位 $\mathfrak{p}$，记作 $W_{\mathfrak{p}}$．对每一个位有一局部单值化元 π，具有 $W_{\mathfrak{p}}(\pi)=1$．整数 $W_{\mathfrak{p}}(z)$ 称为函数 z 在位 $\mathfrak{p}$ 处的阶．若 $W_{\mathfrak{p}}(z)=k$ 为正的，则称 $\mathfrak{p}$ 是函数 z 的 k 阶零位，或称为函数 z 的 k 重零位．若 $W_{\mathfrak{p}}(z)=-h$ 为负的，则称 $\mathfrak{p}$ 为函数 z 的 h 阶极位，或函数 z 的 h 重极．

按 § 74，同余类环 $\bar{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}/\mathfrak{p}$ 总是域，赋值的同余类域．这个域总包含以 Δ^* 中元素(常量)作为代表元的那些同余类所成的域 $\bar{\Delta}^*$．因为 $\bar{\Delta}^*$ 与 Δ^* 是同构的，所以我们可以把 $\bar{\Delta}^*$ 与 Δ^* 等同起来，因而可以把 $\bar{\mathfrak{J}}$ 看成 Δ^* 的扩域．常量域 Δ^* 仍然是基本域 Δ 的扩域．

现在我们证明，$\bar{\mathfrak{J}}$ 是 Δ 的有限扩域．

证．因为 π 不属于 Δ^*，π 对 Δ 是超越的，$\mathbf{K}$ 对 $\Delta(\pi)$ 是代数的．$\mathbf{K}$ 由 $\Delta(\pi)$ 通过添加有限多个元素而成，所以 $\mathbf{K}$ 对 $\Delta(\pi)$ 也是有限的．设 $\mathbf{K}$ 对 $\Delta(\pi)$ 的次数为 m．

现在设 $\bar{\mathfrak{I}}$ 中有 $m+1$ 个对 Δ 线性无关的同余类 $\bar{\omega}_1, \cdots, \bar{\omega}_{m+1}$. 我们相应地在这些同余类中取 $\mathfrak{I}$ 中元素 $\omega_1, \cdots, \omega_{m+1}$. 这 $m+1$ 个元素对 $\Delta(\pi)$ 必须是线性相关的. 于是有

(3) $$f_1(\pi)\omega_1 + \cdots + f_{m+1}(\pi)\omega_{m+1} = 0,$$

其中 $f_1(\pi), \cdots, f_{m+1}(\pi)$ 是 $\Delta[\pi]$ 中的多项式，且不全为零. 我们可以取得使它们不全为 π 所整除. 在模 $\mathfrak{p}$ 下，它们分别相应地约化成它们的常数项 $c_1, \cdots, c_{m+1}$. 于是由(3)得

$$c_1\omega_1 + \cdots + c_{m+1}\omega_{m+1} \equiv 0\ (\mathfrak{p}),$$

或即

$$c_1\bar{\omega}_1 + \cdots + c_{m+1}\bar{\omega}_{m+1} = 0.$$

这样就与 $\bar{\omega}_i$ 是线性无关的假设矛盾. 因此 $\bar{\mathfrak{I}}$ 对 Δ 的次数最多为 m.

这就证明了，$\bar{\mathfrak{I}}$ 对 Δ 是有限的. 因为 Δ^* 是 $\bar{\mathfrak{I}}$ 的子域，所以 Δ^* 对 Δ 也是有限的. 若 Δ 是代数闭的，则 $\bar{\mathfrak{I}} = \Delta^* = \Delta$.

习题. 1. 如果 Δ 中所有元素 a 在赋值 W 下都取值 $W(a) = 0$，则对 Δ^* 的所有元素 b 也都有 $W(b) = 0$.

从现在起，我们不再把 Δ 作为基本域而把 Δ^* 作为基本域，而且不再加星号. 也就是把 Δ 看成在 $\mathbf{K}$ 中是代数闭的.

以后把 $\bar{\mathfrak{I}}$ 对 Δ 的次数用 $f_\mathfrak{p}$ 表示，或简单地用 f 来表示. 对于代数闭的常量域的典型情形，当然 $f = 1$.

我们现在把域 $\mathbf{K}$ 的元素 η 按局部单值化元 π 展开成幂级数. 在 § 82 中对于 $f = 1$ 的情形已经这样做过，现在的方法是一样的. 令$(\bar{\omega}_1, \cdots, \bar{\omega}_f)$是 $\bar{\mathfrak{I}}$ 对于 Δ 的一组基，ω_i 是同余类 $\bar{\omega}_i$ 中任一元素. 设 η 是一个阶为 b 的元素，则 $\eta\pi^{-b}$ 是一个阶为 0 的元素，因而属于 $\mathfrak{I}$. 所以模 $\mathfrak{p}$ 的同余式

(4) $$\eta\pi^{-b} \equiv c_1\omega_1 + \cdots + c_f\omega_f (\mathfrak{p})$$

成立，其中系数 $c_i \in \Delta$ 是唯一确定的．差

$$\eta\pi^{-b} - (c_1\omega_1 + \cdots + c_f\omega_f) \tag{5}$$

是 $\mathfrak{p}$ 中的元素，因而是 π 的倍元：

$$\eta\pi^{-b} = c_1\omega_1 + \cdots + c_f\omega_f + \eta'\pi,$$

$$\eta = (c_1\omega_1 + \cdots + c_f\omega_f)\pi^b + \eta'\pi^{b+1}.$$

余项 $\eta_1 = \eta'\pi^{b+1}$ 至少是 $b+1$ 阶的，于是可以对 η' 重复同样过程．在 s 步后，我们得到

$$\eta = \sum_{k=b}^{b+s-1}(c_{k1}\omega_1 + \cdots + c_{kf}\omega_f)\pi^k + \eta_s,$$

其中余项 η_s 至少是 $b+s$ 阶

令 $s \to \infty$，余项 η_s 趋于极限零，从而得到

$$\eta = \sum_{k=b}^{\infty}(c_{k1}\omega_1 + \cdots + c_{kf}\omega_f)\pi^k, \tag{6}$$

其中系数 $c_{ki} \in \Delta$ 都是唯一确定的．开始项的指数 b 可以是负的，但是在级数(6)中出现的负指数项只能是有限项．

我们可以把这个过程稍许修改一下，取阶为 b 的任意元素 π_b 代替 π^b，并且从(4)式写出 $\eta\pi_b^{-1}$ 的同余式． 于是代替(6)，我们有关于 π_k 的级数展开：

$$\eta = \sum_{k=b}^{\infty}(c_{k1}\omega_1 + \cdots + c_{kf}\omega_f)\pi_k. \tag{7}$$

在(7)式中，π_k 是任意的，只需取阶为 k 的函数即可．

在 § 83 中所证的逼近定理，现在对函数域来说可以表述如下：

I. 若对有限多个位 $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$，相应地任意给出级数(6)的有限截断，那么总可以有域 $\mathbf{K}$ 中的函数 η，使得 η 在这些位上的级