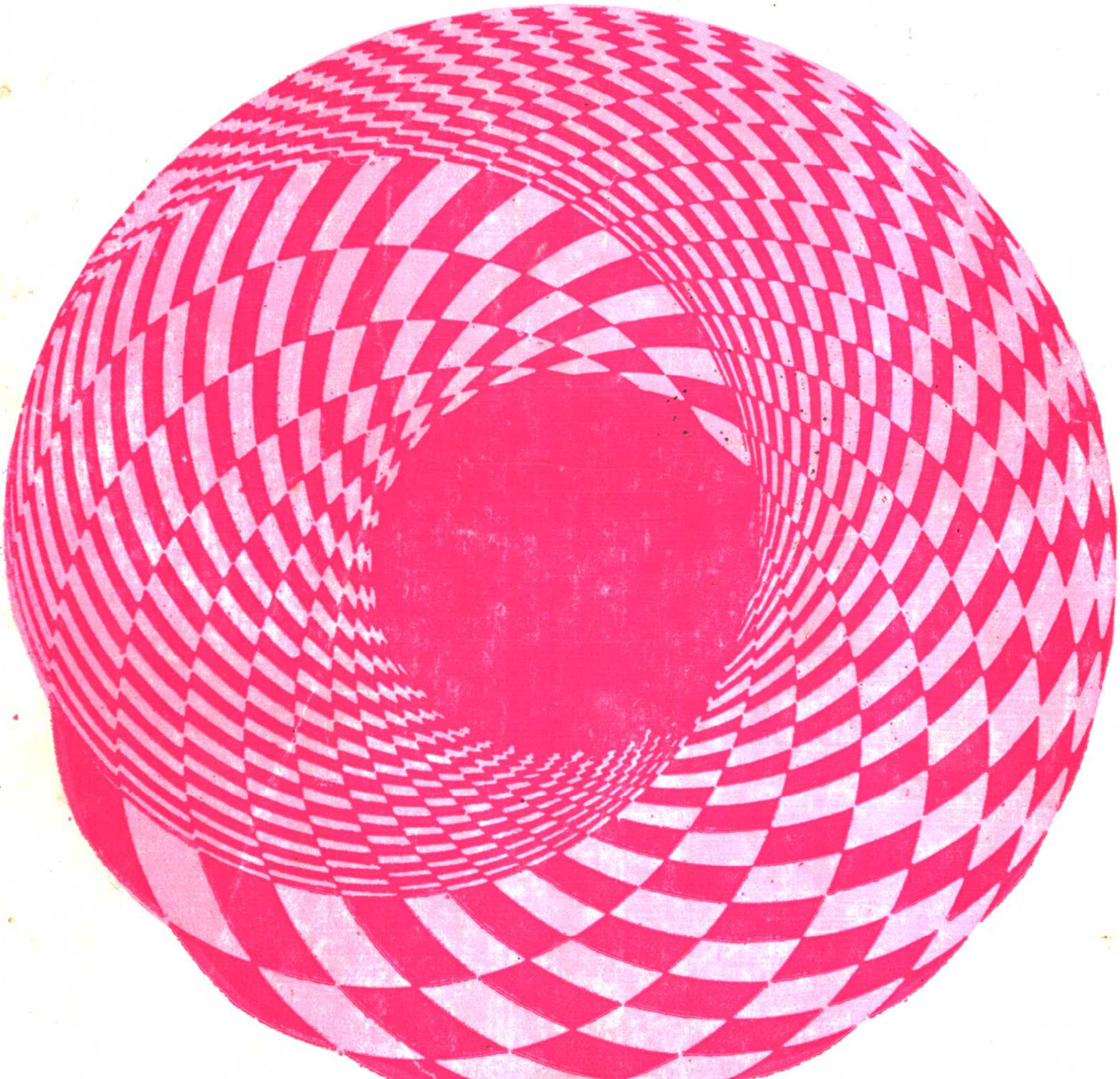
模糊子集引论

INTRODUCTIONTOTHETHEORYOFFUZZYSUBSETS

考夫曼 著
王植槐 尹 侃 王晓星 译
李咏川 校 陆敏玲 绘图
责任编辑 谭 伟



模糊子集引论

考夫曼 著

王植槐　尹侃　王晓星译

江西教育出版社

模糊子集引论
考夫曼 著
王植槐 尹 侃 王晓星 译
李咏川 校
江西教育出版社出版
（南昌市新魏路）
江西省新华书店发行 江西新华印刷厂印刷
开本787×1092 1/16 印张21.75 字数52,6万
1989年3月第1版 1990年3月第1次印刷
印数 1—1,250
ISBN7—5392—0697—0/G·684 定价：6.00元

前　言

为了更好地了解人类的思维过程和认识过程，人们一直在不停地寻找精确的经典数学与模糊的现实世界之间的联系．实际上，模糊子集理论就是建立这种联系的一个步骤．

目前，我们还不可能设计出这样一种机器，即能够在语言识别，文字翻译，理解意识，综合归纳不确定的情况下制定决策，特别是在情报分析上与人类竞争的机器．

我们多半还不能设计这样的机器，用它来消除人类智能与机器智能之间的根本差别．这种差别在于人脑的某种能力（目前任何数学计算机都不可能具有这种能力），人脑可以用不精确的、非数量的、模糊的字眼来思考和推理，正是这种能力使得人类可以识别潦草的手迹，理解被歪曲了的语言，把注意力集中在与一个决策有关的情报上．正是因为缺乏这种能力，哪怕是最复杂的大型计算机，也不能用人类的自然语言（而不是人工构造的语言）与人对话．

数学的基本概念是集的概念，即事物的集合．我们已经开始逐渐看到一种很有可能实现的前景，即人类认识与外部世界相互影响，相互作用的前景．这个外部世界涉及一种结构，它在分类的意义上不是集，而是“模糊集”（或说模糊子集），也就是说这种分类没有明显的界线，从隶属成员到非隶属成员的变迁是逐步的，而不是突然的．确实，用于人类论证的许多逻辑不是经典的双值逻辑，甚至不是多值逻辑，而是一种具有模糊真值，模糊联结词和模糊推导法则的模糊逻辑．这是可以证明的．

我们在追求精确性、严密性的过程中，也企图把现实世界归纳成不具模糊性的数学模型，我们试图用类似分析无生命系统所使用的数学手段来描述指导人类行为的法则．我认为无论用这种方法分析单个的人还是成群的人，总是徒劳的，只要对比一下醉心于寻求永动机和点金术的人就行了．

我们需要的是一种新观点、新概念和新技术．借助于这种新观点、新概念和新技术，我们可以象接受人类生活中所有客观事实一样来接受这种所谓的“模糊性”．显然，我们需要知道如何在经典数学的结构中处理这些模糊集．更重要的是；我们必须用聚类分析的方式来发展用于处理模糊性的新方法，……这种方法可以在心理学、社会学、政治学、哲学、生理学、经济学、语言学、行为科学、管理科学和其它领域开辟很多崭新的天地，并且在人工智能的系统设计方面提供了一个比我们今天所能想象的都要优越得多的基础．

考夫曼教授的著作对于达到这些目的作出了非常重要的贡献，他用独特而又详尽明确的描述首次为这个课题作出了系统的解释，这种解释很可能对于今后几年的工程技术的发展方向有着深远的影响．考夫曼教授在应用数学，系统理论和工程技术等不同的广泛领域中表现了他的罕见的渊博知识，他对模糊集的论述，在理论上有了许多新观点，并使他在很多重要的新领域和新方向上扩充了这个理论．

这一卷主要涉及模糊集理论的数学方面，其后各卷将处理应用问题，集中解决信息处理和人机决策过程．在这些应用问题中，模糊算法的概念起了主要作用，模糊对馈的存在性，

使得用定量方式近似接近人类大脑的不定量思维过程来处理模糊集成为可能。

考夫曼教授的论述无疑是一个非常重要的成就，它必定在今后很多年中对科学思想产生深远的影响，并在科学和工程技术的各个领域中促进深入得多地研究模糊集的理论和应用。

L. A. 扎德

加利福尼亚，伯克利。

序 言

时代的发展需要科学而不是主观迷信，人们一直在追求科学的客观性．然而，由于事物本身存在不确定因素，我们能说科学是绝对客观的吗？客观事物需要我们用人为的模型、人为的公式、人为的定律来描述，否则我们将对客观现实一无所知．但同一模型对一个人来说是精确的，而对另一个人来说也许就不精确；同一个公式也可能有不同的解释．世界必须借助模型来认识，这些模型在实践中不断扩充，不断完善，除非发生重大思想变革，否则它们不会改变．

作为人来说，我们的模型是模糊的，我们的思维方式也是模糊的．这与计算机的模型有天壤之别．计算机是一种按逻辑程序计算的机器，从理论上说，它不会出现任何错误，计算机的本性决定它是一种非模糊的机器．人类除了具有逻辑推导和计算能力以外，还具有综合能力与推理能力．这种综合与推理能力与逻辑计算不同，它们是模糊的，也必须是模糊的．人具有主观能动性，有些信息虽然带有一些模糊性，但人照样可以理解．处理并加以利用．当某个生物几乎不再具有创造性，也就是说它的熵函数几乎等于零时，模糊性消失了，而这个生物也变成程序化了．生物细胞的作用有点象一个小计算机指挥着一个小工厂，(“小”这个词在这里指尺寸大小而不是指复杂程度．）在这样的细胞系统中几乎没有熵．反之，人则具有巨大的熵函数．他会选择，会判断，会思考，会纠正错误寻找正确答案．他会一点一点地学习，直到掌握先进的科学知识．

怎样把综合推理与逻辑推导联系起来？怎样把人的思想与客观现实联系起来？为了寻找并建立奇特的联系，最终必然导致这样的问题：怎样把模糊性引入数学？

“模糊”这个词究竟表示什么意思？用数学语言来说，它是指一个元素在某种不确定的意义上是一个子集的成员．但是大家都知道，在经典数学中一个元素只有两种状态，或者是某子集的成员，或者不是．不论布尔逻辑还是其它形式的经典逻辑都是建立在这个基础上的．

扎德给子集的每个成员赋以权重，从而解决了上述矛盾。模糊子集理论的基本思想，就在于一个元素允许以不同的程度来隶属于某个子集．

波特（1921）、鲁卡斯耶维奇（1937）和莫思尔（1940）创立了n值逻辑并给出一般理论．它们表面上与模糊子集很不相同，但许多内容可以用模糊子集理论来代替．恐怕这两种理论都被美国学者扎德和罗马尼亚学者莫思尔考虑过．

在与模糊子集理论有关的各种会议上，我经常听到这样的观点：凡是能用模糊子集理论解决的问题，不用它照样也能解决．然而这种观点对任何理论都成立．记得二十年前我就听过到这种议论，那时我与一位朋友刚刚写出一本矩阵计算方面的书，结果与另一本有关张量计算的书一样，遭到了批评．图论，近代应用数学以及其它许多新生事物都遭到过批评．也许这些批评别人的人并不了解数学的真谛：数学是建立在某种理想化了的事实上的，也就是说，数学是科学的科学．数学是我们通过逻辑模型建立起来的知识体系，它的内部有一定的结构．

自然数是有序结构，无穷集合也是一种结构，是一种很有用的结构.

有些事物的结构被不确切的边界分成许多部分，诸如思维、语言、人们之间的相互理解等，模糊子集理论至少能处理这些结构．人类科学充满各种抽象概念或具体形式，一贯以精确为宗旨的科学家也开始关心起具有不确定性质的东西．崭新的模糊子集理论为研究不确切事物提供了重要的数学工具，它必将吸引各个领域的科学家，甚至包括文学家和艺术家．文学家和艺术家一直在用模糊性创造着真和美，这种模糊性是绝对必需的，有了它，才能创造出朦胧微妙的美；有了它，才能激发人们无限的想像力．只有具备这种模糊性的人，才能称为具有智力熵的人.

我尽力使这本书能与广大读者所接受，尽力让工程师、设计师、教授、大学生、行政人员、领导人员等各种层次的读者都能看懂．但模糊子集理论并不全是易于理解的，要做到深入浅出很不容易．如果该书激发了读者的新思想和新应用，那就是对我所做努力的最大报酬了．我请求扎德教授为此书写一篇前言，他欣然命笔．他不仅鼓励广大数学家、工程师关心模糊子集理论，而且对该书作者的工作也是一个极大的支持.

如同我的其它书一样，该书是一本教科书．该书介绍了大量例子，并加以详尽说明，这就扩大了篇幅，增加了页数，从而也提高了该书的价格．但我认为该书以这种方式撰写是非常必要的．我估计读者将占全世界工程人员的百分之一以上，必须提供足够的背景知识和良好的训练，才能使他们更好地了解和使用数学，只有适合他我的口味，才能使他们阅读起来更为容易．因此，这本教材显得有点长，专业数学家读起来也许会觉得太啰嗦．当然，数学家喜欢简洁的美，但工程人员也喜欢美，他们不仅关注数学的美，同样也欣赏其它方面的美．作为教授，我有责任接受四十多个国家的讲学和邀请；作为学者，我也有责任对这本教材负责，通过自己的努力使读者掌握更多的知识．正因为如此，如果该书有什么美中不足的话，敬请予以谅解.

模糊性的概念可能来自各个方面，比如变量的描述，变量取值的描述，结构形状等．更广义地说，概念本身的准确程度导致了模糊性．本书中对模糊子集理论的讨论仅限于变量和形状，但也许有的人关心的是概念本身的模糊性．人类科学，特别是生物学，实质上已提出了概念模糊性这个基本问题．模糊子集理论能否解决这个基本问题还要看发展，但我相信模糊子集理论是大有作为的，我们开始的时候先研究模糊性的基本内容，研究变量和形状，这只不过是继续前进的第一步．经济学、语言学、信息论、生物学、心理学、社会学等如此众多的学科都涉及模糊性，它们之中有一个广阔的世界等待开垦．我在这个问题上是乐观的．致力于模糊性研究的人也是乐观的，这种乐观态度并非毫无根据，它建立在慎重和耐心的基础之上.

在这篇序言里有一个重要的问题必须提及，利用二值逻辑的计算机有可能处理模糊性问题吗？答案是肯定的，不过我们必须拿出某种新的硬件，某种新的软件或某种混合型的新构件，我们必须在分析与程序中改变一些传统习惯．很可能在不久的将来，技术专家将设计出模糊逻辑电路，制造出新的二进制逻辑元件，半n一值逻辑元件或连续值逻辑元件，这些元件将构成新一代的计算机．人——机对话越来越重要．随着技术的发展，也许有那么一天，人与计算机之间出现一种新型机器，它能广泛处理各种信息并能自动推理决策．根本不需要输入任何程序，那么这种机器很可能称为联合处理机或推理机．它的最大的特点是能用模糊性

处理模糊性，而不是用简单的二值逻辑处理模糊性．也许，这个当代梦想将在下个十年实现．人们现在已经能够想象用计算机的自适应程序来发展人工智能，人工智能真的能接近或达到人的智能吗？

需要谈到的另一个细节是，我们为什么不把模糊子集称为模糊集？这是因为模糊集在现有理论中不是一个很恰当的概念．参考集总是一个普通集，这种集合在现代数学中已有直观定义，它总是清晰事物的集合．正如我们所看到的，只有参考集的子集才是模糊的．我既不爱固执己见，也不是以严格著称的布尔巴基学派．读过我的书的人都知道，有些定义是不容含糊的，看来我们有时还非要有点布尔巴基精神！

第Ⅰ卷以基础理论为主．第Ⅱ卷涉及应用，该卷主要课题有：模糊语言、模糊系统、模糊自动机、模糊算法、机器与控制、模糊决策，模式识别、分类与检索，文件查询等．与第Ⅰ卷取材的宗旨一样，第Ⅱ卷也含有大量的例子，并且对每个课题的基本知识进行了详尽论述．

许多人给予我帮助，阅读原稿并提出建设性意见，谨在此向他们表示衷心感谢！

我的儿子承担校对工作．他是医学院的学生．他认为医学象其它学科一样，不仅是科学也是一门艺术．数学也是如此．数学好比一件精巧绝伦的工具，一旦掌握了它，迟早会有用武之地．

我们可以毫不含糊地断言，人类智慧绝不是简单的机器，不会简化成具有某种复杂性的程序．哥德尔已从形式上证明了这个断言．因此，我们应该继续我们对创造性的追求，无论今天还是明天，让我们永葆模糊性和创造力．

在第二版中，我根据读者意见纠正了一些错误和遗漏，并修改了某些专用名词．

第Ⅰ卷第二版已于最近出版．介绍应用方面的第Ⅱ卷：第Ⅲ卷也比计划提前几个月脱稿．从收集编辑资料到构思写作直至出版，其中包含了多少辛勤汗水！使我欣慰的是，该书第Ⅰ卷已经与读者、朋友们见面了，这是对我工作的最好报答．崭新的观念正在肥沃的土壤发芽成长，这门带有微妙差异和主观意识的数学，必将为人类科学创建一个更完美的模型．

A．考夫曼

译者的话

“模糊子集引论”，原版是法文本。我们的中译本是根据1975年的英文本译出的。

在翻译过程中，得到国防科技大学汪浩教授的亲切关怀和具体指导。本书在出版过程中，得到江西工业大学漆淦生副教授的大力支持和帮助，并承江西大学李咏川讲师校审全书。在此，我们一并表示衷心感谢。本书共五章，长沙铁道学院王植槐副教授翻译第一、四、五章和附录；长沙铁道学院尹侃副教授翻译第二章；国防科技大学王晓星讲师翻译第三章和前言。

模糊数学是七十年代新兴且正在蓬勃地向前发展的一个科学分支。近年来国内在模糊数学方面的研究，亦已取得可喜的成绩。模糊数学理论同纯数学，应用数学及自然科学的其它领域，人文科学和管理科学有着密切的联系。模糊数学理论的最大魔力是：它在经济学，心理学，社会学，语言学，哲学，法律，医学，管理科学，控制论和开关理论，以及系统工程理论等学科领域中，有着广泛而深刻的应用。“模糊子集引论”这本书提供了上述应用的理论基础。它总结了模糊集论的基本理论，论述严谨、系统，叙理明白易懂，书中并附有大量例题和习题。本书可作为数学专业，计算数学及应用软件专业，自动控制专业及系统工程等专业的教学参考书，也可供科研人员、工程技术人员、大学师生和数学工作者阅读。由于译者学识浅薄，书中缺点和错误难免，请读者批评指正。

主要符号表

A	普通集或子集
$\underset{\sim}{A}$	模糊子集
$\in$	属于的符号
$\notin$	不属于的符号
$\lvert A \rvert$, $cara A$	A的元素个数或A的基数
$\subset$	是……的子集（包含）
$\subset\subset$	是……的真子集
$\not\subset$	不包含
$\cup$	并
$\cap$	交
$\overline{A}$	A 的余
$\overline{\underset{\sim}{A}}$	$\overset{\frown}{A}$ 的准余
$P(E)$	E的普通子集所成集，E的幂集
ϕ	空集
L^E	当隶属度函数在L中取值时，E 的模糊子集所成集。有时记为$\underset{\sim}{P}(E)$
$E_1 \times E_2$	E_1与E_2的直积或积
$\Rightarrow$	隐含着
$\Leftrightarrow$	逻辑等价
$\exists x$	存在一个x
$\exists ! x$	存在一个且只有一个x
$\forall x$	对所有x
$E_1 \xrightarrow{\Gamma} E_2$	E_1到E_2的映射Γ
$E_2 \xrightarrow{\Gamma^{-1}} E_1$	E_2到E_1的映射Γ^{-1}（Γ的逆映射）
$\Gamma_2 \circ \Gamma_1$	两个映射Γ_1与Γ_2的合成
iff	当且仅当
$\oplus$	析取和
$X \leqslant Y$	顺序关系
$X < Y$	严格有序关系
N	自然数集$N=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
N_0	除去 0 的N
Z	整数集，$Z=\{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \cdots\}$

Z_0	除去0的Z
R	实数集
R_0	除去0的R
R^+	非负实数集
R_0^+	正实数集
R^n	集合积$R\times R\times\cdots\times R$($n$个因子),或$n$维实空间
$]a, b[$	R的左右开区间,从而$\{x \mid a<x<b\}$
$]a, b]$	R的左开右闭区间,$\{x \mid a<x\leqslant b\}$
$[a, b[$	R的左闭右开区间,$\{x \mid a\leqslant x<b\}$
$[a, b]$	R的左右闭区间,$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$\mu_A(x)$	元素x关于模糊子集$\underset{\sim}{A}$的隶属度函数
$d(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$	两个模糊子集$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$间的广义哈弥距离
$g(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$	两个模糊子集$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$间的广义相对哈弥距离
$\underset{\simeq}{A}$	最接近模糊子集$\underset{\sim}{A}$的普通子集
$\nu(\underset{\sim}{A})$	模糊子集$\underset{\sim}{A}$的模糊性指标
A_α	模糊子集$\underset{\sim}{A}$的α水平普通子集
$max(X, Y)$或$X\vee Y$	X与Y的最大值
$min(X, Y)$或$X\wedge Y$	X与Y的最小值
$sup(X, Y)$或$X\bigtriangledown Y$	X与Y的上限
$inf(X, Y)$或$X\bigtriangleup Y$	X与Y的下限
$\hat{+}$	代数和符号, $a\hat{+}b=a+b-a.b$
$\underset{\sim}{G}\subset E_1\times E_2$	模糊图
$R_2\circ R_1$	两个模糊关系的组合
$\underset{\simeq}{R}$	最接近模糊关系$\underset{\sim}{R}$的普通关系
$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y\parallel x)$	条件模糊子集的隶属度函数
$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y)$	序偶(x, y)关于模糊关系$x\underset{\sim}{R}y$的隶属度函数
R^n	表示$R\cdot R\cdot\cdots\cdot R$($n$重)
$\overline{\underset{\sim}{R}}$	$\underset{\sim}{R}$的余关系$\mu_{\overline{\underset{\sim}{R}}}(x, y)=1-\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y)$
$\hat{\underset{\sim}{R}}$	$\underset{\sim}{R}$的可传递闭包
$l(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_r})$	由x_{i_1}到x_{i_r}的道路的值
$l^*(x_i, x_j)$	x_i到x_j的最强道路

$\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, …	模糊变量
$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \cdots)$	模糊变量的函数
$(E, *)$	群坯
$D(X_i, X_j)$	二元素X_i与X_j间的距离
$MOR(X, Y)$	一个范畴的同态所成集
$\underset{\sim}{\Gamma}$	模糊映射

目　　录

第一章　基本概念

第二章　模糊图和模糊关系

第三章 模糊逻辑

第四章 模糊合成法则

第五章 模糊子集概念的推广

第一章　基本概念

1、引　言

在这一章里，我们回顾普通集合理论的主要定义和概念，普通集合的理论是当代数学的基础，但是这些定义和概念，将经过重新审查，并推广为属于模糊子集的概念。

我们宁可放慢进度，以使并不专门从事数学工作，而只是把这门数学作为工具来使用的读者也能够毫无困难地阅读下去。

一些例子将帮助读者一步一步检查新的概念是否完全弄明白了。第一章里的例子都是比较简单的，以后的例子则稍为难一些。

普通集合的理论是模糊子集理论的特殊情形，（我们将立即发现，为什么必须称模糊子集而不是模糊集合——参考集不是模糊的）。在这里我们有一种很有用的扩充；但是如我们多次强调的一些可以用模糊子集理论来描述或解释的概念，也可以不用模糊子集理论而予考虑，却用其它概念来描述或解释。人们通常可以用一种数学概念代替另一种数学概念，但它是否那样清晰，或者它产生的性质是否比较容易发现和证明，以及使用呢？

2、隶属度概念的回顾

设E是一个集，A是E的一个子集：

（2.1）　$$A \subset E$$

我们通常用符号$\in$表示E中元素X是A的成员：

（2.2）　$$X \in A$$

为了表示这种隶属关系，我们也可以采用另一个概念，即特征函数$\mu_A(x)$，它的值表示x是不是A的一个元素：

（2.3）　$$\mu_A(x) = 1 \text{ 如果 } x \in A$$
$$= 0 \text{ 如果 } x \notin A.$$

例　考虑一个具有五个元素的有限集：

（2.4）　$$E = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$$

并且设

（2.5）　$$A = \{x_2,\ x_3,\ x_5\}.$$

则有

（2.6）　$$\mu_A(x_1) = 0,\ \mu_A(x_2) = 1,\ \mu_A(x_3) = 1,\ \mu_A(x_4) = 0,\ \mu_A(x_5) = 1.$$

这就允许我们用特征函数值伴随E的元素来表示A：

（2.7）　$$A = \{(x_1, 0),\ (x_2, 1),\ (x_3, 1),\ (x_4, 0),\ (x_5, 1)\}.$$

回忆布尔二元代数性质：

设 $\overline{A}$是A关于E的余集

(2.8) $$A \cap \overline{A} = \phi,$$

(2.9) $$A \cup \overline{A} = E.$$

(2.10) 如果 $x \in A$，$x \notin \overline{A}$，则

(2.11) $$\mu_A(x) = 1, \quad \mu_{\overline{A}}(x) = 0.$$

考虑（2.6）和（2.7）中的例子，我们知道：

(2.12) $$\mu_{\overline{A}}(x_1) = 1, \ \mu_{\overline{A}}(x_2) = 0, \ \mu_{\overline{A}}(x_3) = 0, \ \mu_{\overline{A}}(x_4) = 1, \ \mu_{\overline{A}}(x_5) = 0,$$

我们记

(2.13) $$\overline{A} = \{(x_1, 1), (x_2, 0), (x_3\ 0), (x_4, 1), (x_5, 0)\}.$$

现在，给定两个子集A和B，我们可以考虑其交集

(2.14) $$A \cap B$$

我们有

(2.15) $$\mu_A(x) = 1 \quad 如果 x \in A$$
$$= 0 \quad 如果 x \notin A,$$

(2.16) $$\mu_B(x) = 1 \quad 如果 x \in B$$
$$= 0 \quad 如果 x \notin B,$$

(2.17) $$\mu_{A \cap B}(x) = 1 \quad 如果 x \in A \cap B$$
$$= 0 \quad 如果 x \notin A \cap B$$

这就允许我们写成

(2.18) $$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x),$$

其中运算．相当于图2.1中的表，并称为布尔积

(.)	0	1
0	0	0
1	0	1

图2.1

同样对于两个子集A和B，我们定义并集

(2.19) $$\mu_{A \cup B}(x) = 1 \quad 如果 x \in A \cup B$$
$$= 0 \quad 如果 x \notin A \cup B;$$

和性质

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \dot{+} \mu_B(x),$$

其中运算$\dot{+}$是由图2.2中的表来定义的布尔和

$(\dot{+})$	0	1
0	0	1
1	1	1

图2.2

例 考虑参考集（2.4）和两个子集

(2.21) $$A = \{(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 1)\},$$

(2.22) $$B = \{(x_1, 1), (x_2, 0), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 1)\},$$

我们知道

(2.23) $$A \cap B = \{(x_1, 0.1), (x_2, 1.0), (x_3, 1.1), (x_4, 0.0), (x_5, 1.1)\}$$

$$= \{(x_1, 0),\ (x_2, 0),\ (x_3, 1),\ (x_4, 0),\ (x_5, 1)\}$$

(2.24) $$A \cup B = \{(x_1, 0 \dotplus 1),\ (x_2, 1 \dotplus 0),\ (x_3, 1 \dotplus 1),\ (x_4, 0 \dotplus 0),\ (x_5, 1 \dotplus 1)\}$$

$$= \{(x_1, 1),\ (x_2, 1),\ (x_3, 1),\ (x_4, 0),\ (x_5, 1)\}$$

从这两个子集出发而继续下去，我们们有

(2.25) $$\overline{A \cap B} = \{(x_1, 1),\ (x_2, 1),\ (x_3, 0),\ (x_4, 1),\ (x_5, 0)\}$$

(2.26) $$\overline{A \cup B} = \{(x_1, 0),\ (x_2, 0),\ (x_3, 0),\ (x_4, 1),\ (x_5, 0)\}$$

这几个练习只是作为了解模糊子集的先导。

3、模糊子集概念

我们从一个例子开始。考虑由（2.7）定义的E的子集A。E中五个元素或者属于A，或者不属于A，二者必居其一。特征函数仅取值0或1。

现在设想特征函数可以取区间〔0，1〕中任何一个值。因此，E的元素x_i可以不是A的元素（$\mu_A = 0$），可以稍许是A的元素（μ_A接近于0），可以或多或少是A的元素（μ_A既不太接近于0，又不太接近于1），可以差不多是A的元素（μ_A接近于1），最后可以是A的元素（$\mu_A = 1$）。在这种意义下隶属度概念获得一个有趣的推广，并且，正象我们将要看到的那样，导出一个很有用的发展。

所定义的数学概念表示如下：

(3.1) $$\underset{\sim}{A} = \{(x_1|0,2),\ (x_2|0),\ (x_3|0,3),\ (x_4|1),\ (x_5|0,8)\}$$

其中x_i是参考集E的元素，并且放置在直线（*bar*）〔注〕后面的数字是相应元素的特征函数值。由这个表示式所定义的数学概念称为E的模糊子集，并表示为：

(3.2) $$\underset{\sim}{A} \subset E，或 A \underset{\sim}{\subset} E.$$

我们可以用

$$x \underset{0,2}{\in} \underset{\sim}{A},\qquad y \underset{1}{\in} \underset{\sim}{A},\qquad z \underset{0}{\in} \underset{\sim}{A}.$$

来表示在模糊子集中的隶属度。符号$\underset{1}{\in}$可以认为等价于$\in$，$\underset{0}{\in}$等价于$\notin$。为了避免记号的累赘，我们简单地用$\in$表示隶属，用$\notin$表示不隶属。

因此，由（3.1）所定义的模糊子集，包含一点x_1，不包含x_2，包含稍多点x_3，完全包含x_4，和包含大部份x_5。这就允许我们去建立一种数学结构，运用这种结构，我们能设想一些定义得颇为粗糙的概念，但对这种数学结构本身来说，子集的隶属度从某种程度上可以显示它的层次等级，因此，我们可以考虑：在人的集合中，很高的人为模糊子集，在基本颜色的集合中，深绿色为模糊子集；在各种决策的集合中，好的决策为一模糊子集，如此等等。我们将会看到，如何巧妙处理这些概念，而这些概念恰好对社会科学中那些常见的模糊现象

〔注〕为了避免混淆起见，象在（2.7）中的逗点的位置采用一条垂直的线。当然，当我们应用美国小数点时，线的位置可以采用逗点。