

001652902

初中平面几何 教材教法

华中师范学院 数学系編
武汉师范学院



湖北人民出版社

內容提要

本書根據黨的教育方針，根據現行初中平面幾何課本的特點，說明在初中幾何教學中如何貫徹黨的教育方針，發展學生的邏輯思維能力，培養學生的數學知識、技能和熟練技巧；說明初中平面幾何教材中的緒論、三角形、平行綫、四邊形、圓等重要部分的教學內容、教學目的、教學建議。本書可供中學教學教師教學參考用。

初中平面幾何教材教法

華中師範學院
武漢師範學院 數學系編

湖北人民出版社出版（武漢解放大道332號）

武漢市書刊出版業營業許可證新出字第1號

湖北省新華書店發行

武漢市國營武漢印刷廠印刷

857×1168 1/32 · 7 13/16 印張 · 189,000字

1959年12月第1版

1960年1月第2次印刷

印數：10,001—25,000

統一書號：7106 · 490

定 價：(8) 0.75 元

編者的話

本書是在黨的“教育為無產階級政治服務，教育與生產勞動相結合”的方針指導下，根據現行初中平面幾何課本的具體內容編寫的。

本書的主要內容是：說明初中幾何教材各章節的教學目的、教材教法和在教學過程中如何貫徹黨的教育方針的問題。

在引言中，首先對幾何學研究的對象及其發生發展作了簡略的介紹，明確幾何學的實踐起源及其在生產實際中的廣泛應用；其次就整個中學幾何的內容作了較全面的分析，明確中學幾何的科學系統性以及所討論的中心問題；並在這裡介紹一些有關中學幾何教學改革的意見，供讀者參考；對於教法方面也提出一些原則性的意見。

各章的內容，大致由以下五個部分組成：（1）各章的教學內容及其科學系統的概括說明；（2）各章的教學目的的探討；（3）結合教材分析提出教法建議以及教學注意事項，特別是較難問題的解決途徑和根據；（4）如何貫徹黨的教育方針的初步意見；（5）對教材中某些理論問題作較淺顯的闡明。

考慮到本書的任務以及各章節的特點，在編寫中我們注意到了重點地解決問題，並非普遍地敘及上述各個方面；例如有些章節着重教材分析，而另一些章節則着重教法探討。

在編寫過程中，我們吸取了有關著作的優點，主要參考書有：“初級中學課本平面幾何教學參考書”（余元庚等編），“中學數學教

學法”(弗·姆·伯拉基斯著)，“
亞平主編)。

教學法”(薩·耶·利

初稿印出后，曾經在华中师范学院举办的函授教师进修班和
武汉师范学院举办的数学教师短训班作为“初中平面几何教材教
法研究”課本試用。通过教学实践，學員們对本書的初稿提供了很
多宝贵的意見。此外还以書面的方式征求了部分中学教师的意見。
虽然这样，但由于我們的水平有限，書中錯誤和缺点在所難免。
我們迫切地希望讀者們提出意見，以便进一步修改，使其发
揮应有的作用。

目 录

引 言

I	关于中学几何教学的目的	1
II	关于中学几何的内容	2
III	关于初中几何教学的几个问题	76
IV	关于初中几何教学改革	29

第一章 緒 論

I	基本概念	42
II	直 綫	50
III	圓的概念	55
IV	角的概念	58
V	角的量法	65
VI	定义、公理、定理	77

第二章 三 角 形

I	关于多边形和三角形的概念	87
II	轴对称的几何图形	94
III	等腰三角形的性質	98
IV	三角形的全等	101
V	三角形的外角和它的性質	112
VI	三角形的边和角的相互关系	115
VII	三角形两边的和与差	120
VIII	两条边对应相等的两个三角形	125

IX	从一点到一直线的垂线和斜线的长度的比较	131
X	直角三角形的全等	133
XI	线段的垂直平分线的性质和角的平分线的性质	138
XII	基本作图题	151
XIII	三角形的作图题	156

第三章 平行线

I.	基本定理	175
II	对应边互相平行或者互相垂直的两个角	182
III	三角形与多边形内角的和	185

第四章 四边形

I	平行四边形	194
II	几种特殊的平行四边形: 矩形、菱形、正方形	200
III	以平行四边形的性质为基础的某些定理	202
IV	梯形	205

第五章 圆

I	圆的一般性质	212
II	弧、弦和弦心距间的相依关系	216
III	直线和圆的相互位置	217
IV	两个圆的相互位置	221
V	和圆有关的角、切线的作法	223
VI	用轨迹法解作图题	237

第六章 圆内接与外切三角形和四边形

I	圆内接与外切三角形	239
II	圆内接与外切四边形	241
III	三角形的外心、内心、旁心、垂心、重心	242

引 言

I 关于中学几何教学的目的

根据教学大纲的规定，中学几何教学的目的，“在于系统地研究平面上和空间物体图形的性质，并且利用这些性质去解决计算题和作图题；在于发展学生的逻辑思维 and 空间的想象力；并且使他们能运用所学到的知识去解决实际问题；进行实地测量，测定各种建筑物的表面积和容积等等”。由此可知，中学几何教学的目的，可以概括为四个方面：第一，研究几何图形的性质；第二，几何知识的实际应用；第三，发展逻辑思维；第四，发展空间想象能力。

所以，中学几何教学：一方面应给予学生以几何的系统的知识，培养他们解题的技能技巧，以及应用几何知识于实际的能力；另一方面，则应发展学生的逻辑思维 and 空间想象能力。

对于初中阶段来说，几何教学的目的与任务，在于使学生树立几何图形的概念，熟练地掌握直线形和圆的性质，熟悉有关直线形和圆的图形的作图及几何计算，并应用几何知识作些简单的测量作业。此外，初中阶段的教学，必须逐步发展学生的逻辑思维，要求学生掌握几何学中的推理方法和解答几何问题的书写格式。

如同中学其他数学科目一样，教师在几何教学过程中，必须以共产主义思想教育学生，要充分联系我国社会主义革命和社会

主义建設中各方面的成就与情况，以及当前的国际形势，以培养他們成为积极参加社会主义建設和保卫祖国的全面发展的新人。注意培养他們无产阶级的阶级观点和辯証唯物主义世界觀，爱国主义思想和民族自尊心以及爱科学、爱劳动、爱集体、守紀律的美德，并且鍛炼学生的坚强意志和性格。为此，必須注意：

一、通过具体形象闡明几何图形及几何命題的现实性，說明抽象的形式，只能在表面上掩飾它的现实性的本質；通过几何学的简单历史的介紹，指出几何学起源于实践，并因实践的需要而遵循实践——理論——实践的发展道路不断发展。

二、介紹我們祖先在几何学上的光輝成就及对几何学发展的貢獻。

三、联系本地、本县、本省、全国以及社会主义陣营的社会主义建設成就，闡明几何学在现实生活中、在社会主义建設中的作用和貢獻。

四、注意理論与实际的联系，講清几何知識的应用，重視几何計算，领导学生去进行实地測量、实际繪图和实际的几何計算。

五、通过演繹推理启发学生积极思維，培养学生邏輯思惟的能力和习惯。

六、闡明几何学与其他科学的联系和关系、中学几何知識本身的联系和关系。

初中阶段的教學，必須結合自身的教學內容和学生年齡特征，貫徹上述各項。

II 关于中学几何的內容

一、几何学簡史梗概

1. 几何学的发生。

几何学原名“测地学”。由于测量、計算的需要，在劳动人民积累的几何图形的观念的基础上而发生。

在古代，例如由于尼罗河的泛滥，河床变迁，地标遺失，劳动人民于水退之后，需要整理田地和房屋，測量計算，以从事生产；为防止水患，需要开沟筑渠，修堤建壩；国家为了厘定賦稅，派員測量土地。由于以上測量計算的实践，而产生了几何学的初步知識。

埃及、巴比倫、中国、印度，是最早有几何知識的国家。

2. 几何学的发展。

几何学的发展，大体可分三个阶段。

第一阶段（紀元前三世紀以前）：

几何学的内容首先是关于某些面积与体积的計算。它們被以法则的形式陈述出来；大部分靠經驗得来，邏輯的論証都是极为幼稚的。公元前七世紀，几何学由埃及、巴比倫傳入希腊。在那里，它才被建立成一个比較严整的系統。这时著名的几何学家有：太勒斯（紀元前七世紀）、毕达哥拉斯（紀元前六世紀）、柏拉图（紀元前五世紀）、阿基米得（紀元前三世紀）、阿波罗尼斯（紀元前三世紀）、欧几里德（紀元前三百三十年至紀元前二百七十五年）。

第二阶段（紀元前三世紀至十九世紀）：

欧几里德著成“几何原本”，把几何知識系統地建立在定义、公理和定理的邏輯基础上，解决了几何的系統和邏輯結構的問題。

十七世紀初叶，法国笛卡儿（1596—1650年）在几何中引入坐标而創立解析几何学，用代数方法来研究由直角坐标系的代数方程所給定的图形的性質和交換。十八世紀中叶，由瑞士的欧拉（1707—1783年）和法国的蒙日（1746—1818年）創立微分几何

学，用分析学的方法，来研究曲面以及曲线的性质和变换。

十七世纪之后，法国的笛卡儿、巴斯加等在几何学中加入了正负量及无穷远元素，并采取连续原理与对偶原理，产生了近世综合几何学，而且，相伴而生者，有法国的蒙日创立的画法几何学，及法国的蒙塞尔于1822年创立的射影几何学。

这阶段中，几何学，在方法上，除综合法之外，又引入了代数法与分析法；在内容上，则进展到图形变换的研究。被研究的变换有合同变换、位似变换、反演变换、仿射变换、射影变换等。而且研究的图形也扩大到了任意曲线和曲面。

第三阶段（十九世纪及以后）：

伟大的俄罗斯数学家罗巴契夫斯基于1826年，发表了自称“虚几何学”的罗巴契夫斯基几何学（或双曲几何学），形成了数学史上的伟大革命。嗣后，1854年德国的黎曼发表了黎氏几何学（或椭圆几何学）。

1899年德国数学家希尔伯特刊印了“几何基础”一书，确定了欧氏几何的严密公理体系，使欧氏几何的逻辑结构更趋严密化。罗氏几何及黎曼几何这时亦有严密的公理体系。

这时期中，射影几何学、微分几何学都有了很大的发展。射影几何学，在方法上，最初用的是综合法，嗣后采用了代数法；在内容上，采用了无穷远元素与虚元素，使用了对偶原理。并且，第一方面，德国数学家克来茵（1849—1925年）用变换群的意义，把几何学分类：欧氏几何是无穷远线及圆点不动的射影几何学，罗氏几何是一条实圆锥曲线不变的射影几何学，黎氏几何是一条虚圆锥曲线不变的射影几何学；第二方面，几何元素得到了扩张，除点而外，直线、圆、球都可以作为几何的元素，而有直线几何学、圆几何学及球几何学。此外，几何学的维数亦有了推广，除我们熟知的一维、二维、三维几何学外，更被推广而有 n

維几何学。微分几何学，由于近代分析学的飞跃发展而有了巨大的发展。第一，它利用了仿射变换与射影变换以研究曲线和曲面的特性；第二，它由研究任意小片段曲线和曲面的性质，而扩展至研究“整个”（例如封闭的、延伸至无穷远的或至少有某种确定界限的）曲线与曲面的性质，而出现了整个范围的微分几何学。

在这时期中，产生了拓扑学（即形势几何学，亦称连续几何学），它是法国数学家龐加會于五十年前奠定的。它所研究的对象，乃拓扑变换下图形不变的性质，即图形的拓扑性质。

二、中学几何的内容

1. 按照1956年教育部颁布的教学计划的规定，中学几何分设平面几何、立体几何两个教学科目。前者于初中二年级上学期至高中二年级上学期开设，后者于高中二年级下学期至高中三年级开始。

平面几何学所研究的图形，乃在同一平面上的，而立体几何学所研究的图形，它的所有点则不全在同一平面上。

必须明确，在中学几何中，平面几何居于基础地位。一者因为平面几何中所得的结论，有些在立体几何中可以不加证明而被直接采用。再者，平面几何的学习，是学生学习几何的开始，对于了解图形性质、发展空间想象力、掌握推理方法、发展逻辑思维均起着奠基的作用。

2. 中学平面几何。

1° 几何学乃研究几何图形及其性质的科学。

对于平面几何学，就被研究的几何图形说来，它并非广泛地研究着任意图形，而是有一定的局限性的。首先，它研究的几何图形，必须是在同一平面上的，图形上的所有点不全在同一平面上的图形的研究，不属平面几何的任务；其次，即使就在同一平

面上的图形說来，它也并非研究平面上的任意图形，而仅仅研究平面几何图形中特殊的最为简单的一类。它們是由点、特殊的綫——直綫、最简单的曲綫(圓)，以及它們的部分(射綫、綫段、弧)所組成的图形。

对于平面几何学，就被研究的几何图形的性質說来，无外乎是几何图形的形状、大小和位置。

(1) 几何图形的形状：

在点、綫、面、体等几何元素中，由于平面几何研究的乃是同一平面上的图形，因而，所能涉及的只能是点与綫。除点而外，对于“綫”，仍是附加有限制的。平面几何无力研究任意的曲綫，而只能研究其中最为简单的直綫与圓。因而平面几何所研究的图形，只是点、直綫与圓以及它們的部分——射綫、綫段、弧——的集合。

最简单的直綫图形，除角而外，唯推折綫与多边形。一般言，多边形分复杂多边形与简单多边形两类。所謂复杂多边形，乃指：a) 多边形的边有公共的内点，b) 頂点在边上，c) 通过多边形同一頂点有多于二条多边形的边之类的多边形。除此以外的多边形統称简单多边形。对于一般复杂多边形，平面几何是无力研究的，只能研究其中被称为正多角星形等一类特殊的复杂多边形，如正五角星等。简单多边形通常又分凸多边形与凹多边形两类。所謂凸多边形，乃指延长多边形的一边时，多边形的其余頂点均在这边的同側等一类多边形。除此而外的简单多边形，則称凹多边形。简单多边形中，平面几何所研究的主要只是凸多边形。凸多边形，通常又可按边数分类为三边形、四边形、五边形……。对于任意边数的凸多边形，除了研究其中特殊的一类——正多边形以外，对一般的，只能研究它的內角和、外角和以及由此而推导出的一些性質。在凸多边形中，平面几何主要只

研究三边形（三角形）、四边形等最简单的凸多边形。而在四边形中，更着重于研究其中一些特殊的：如平行四边形、矩形、菱形、正方形、梯形之类的四边形。

关于圆的图形，被研究着的，除了圆与圆所形成的图形外，尚有圆、弧与直綫、射綫、綫段所形成的图形。如其中的扇形、弓形，它們是弧与綫段所形成的图形。

平面几何中所研究的各种形状的几何图形，初中阶段多已引用，高中阶段的学习，除正多边形一类外，并未引用更多的新的几何图形。初中几何中，于“緒論”中引用“圆”、“角”、“扇形”之后，即于以后各章中，展开对三角形、四边形、圆等几何图形的研究。

(2) 几何图形的大小关系：

大小关系乃量的属性。平面几何中所研究的量，只有綫段的长度、角和弧的度数、弧长和面积。因此，平面几何中所研究的图形的大小关系，无外乎是綫段的长短、角度或弧度的大小、弧的长短、面积的大小及相等或不等之类。

对大小关系的研究被表现为如下的形式：

a) 比較：两量的比較关系通常是以“相等”、“大于”和“小于”的形式表出的。

b) 度量：几何的量被它的度量数表出。两量的“比”，只是度量的另一形式，这时被取作度量标准的量乃“比”的后项。

c) 計算：若干量的关系被通过計算表出。并且“計算”也是研究量的关系的另一方面——量的运算——的形式。

对几何量的大小关系的研究，通常表现于如下两种方式：一为直接从事对上述几何量的大小关系的研究，比如綫段的比較、运算和度量，角以及弧的比較、运算和度量，圆周长及弧长的計算，面积的度量，比較和計算。一为大小关系存在于图形中而被研究着。比如三角形的全等的研究，实质乃系两三角形的三边及

三角的对应相等的关系被研究着；研究圓的相等，則归結为研究它們的半徑的相等；两三角形相似的研究，則实質归結为它們的对应角相等、对应边成比例的角度以及边的大小关系的研究。

(3) 几何图形的位置关系：

平面几何中所研究的图形的相互位置，无外乎是相交、相离、相切、相接、重合等关系以及排列順序的前后的关系。

考察几何图形的位置关系，可以归結为考察点、直綫、圓相互間的位置关系。因为任何图形的位置关系，无非是一些点、直綫、圓相互間的位置关系的結合。而点、直綫、圓的位置关系，可以归結如下：

点与点間的位置关系：点与点重合；点与点不重合。

点与直綫的位置关系：点在直綫上（或直綫通过点）；点不在直綫上（或直綫不通过点）。

点与圓的位置关系：点在圓上；点在圓外；点在圓內。

直綫与直綫間的位置关系：直綫与直綫相交；直綫与直綫平行，直綫与直綫重合。

直綫与圓的位置关系：直綫与圓相离；直綫与圓相切；直綫与圓相交。

两圓間的位置关系：两圓外离；两圓內离；两圓外切；两圓內切；两圓相交。

点在直綫上及点在圓上时，存在有一点“介于两点之間”的順序关系。

必須明确，图形的大小关系与位置关系并非各自孤立各不相关的。首先，它們乃相互联系、相互制約着的。点与圓的位置关系，可以由点与圓心的距离大于、等于或小于半徑，即比較点与圓的距离和半徑兩綫段的大小关系而确定。反过来，比較点至圓心的距离、圓的半徑如此兩綫段的大小，亦可由点与圓的位置而

确定。直线与圆的相互位置关系（相离、相切、相交），可以由比较圆心至直线的距离、圆的半径如此两线段的大小关系（大于、等于、小于）而确定，反过来也对。两圆的外离、外切、相交、内切、内离的位置关系，则决定于圆心距大于两圆的半径的和、等于两圆的半径的和、小于两圆的半径之和而大于它们的半径的差、等于两圆的半径的差、小于两圆的半径的差的大小关系。并且，反过来也对。其他如两直线的是否平行的位置关系，则可由比较以另一直线截此二直线时，所成的内错角是否相等的角的大小关系而确定。

其次，它们并存于图形中而被研究着。“垂直”这个概念，就位置关系说，两直线相交（基于研究的图形在同一平面上，因而不会发生空间的两直线交错的情形），就大小关系说，两直线所成的角是直角。所以研究“垂直”这个概念，则同时研究着两直线相交的位置关系与两直线所成的角是直角的大小关系。“邻补角”这个概念，就位置关系来说两角互为邻角；就大小关系来说，两角互为补角。“两线段互相平分”这个术语，则包含两线段相交的位置关系和一直线上被分成的两线段相等的大小关系。

对于几何图形的性质的研究，只是在进行着对图形的形状、大小关系、位置关系的研究。事实上，由于平面几何学主要只研究在同一平面上的合同变换和位似变换下的图形的不变性质，因此只须考察合同变换以及位似变换下的两图形的关系。

第一，合同变换有反射（即轴对称）、平行移动、旋转三种形式。合同变换下的两图形，表现为“全等”的关系。所以考察被研究的图形的性质，只须着眼于剖析图形的“全等”的概念。

两图形“全等”，乃指两图形形状和大小相同。尽管没有指出两图形的位置的要求，但是“全等”的两图形，经过移动后，是可以重合的。

“全等”的两图形，形状是相同的。与直线全等的图形是直线；与圆全等的图形是圆；与多边形全等的图形是与它形状相同的多边形。

“全等”的两图形的大小相同，实质上乃指两图形中有关的线段的相等、角或弧的相等、面积的相等。比如，两圆的相同，乃归结为两圆半径的相同；而多边形的大小相同，乃归结为它们的对应线段相等、对应角相等。并且可知，全等图形的面积亦是相等的。

两图形“全等”，通常是沒有提出两图形的位置要求的。它们的位置基本的有如下三种：

a) 全等两图形被放置于关于某一直线或轴对称的位置，这时只要经过一个反射（或折迭）就可使两图形有相同的位置（即两图形重合）。

b) 全等两图形，保持对应线段互相平行而放置于不同的位置，这时只要经过一个平行移动，就可使两图形有相同的位置（即两图形重合）。

c) 全等两图形，保持它们的每对对应点至平面上一定点的距离相等，且每对对应点对该定点所张的视角相同，而被放置于不同的位置，这时，只要经过绕该定点的一个旋转，就可使两图形有相同的位置（即两图形重合）。

此外，全等两图形，可以被放置于这样的位置：需要经过反射、平行移动、旋转之中几者的结合，才能使两图形重合。

第二，位似变换下的两图形，表现为“位似”的关系。两图形“位似”乃指相似，且有相似位置。而相似则指两图形形状相同、大小按比例放大或缩小。

就形状言，两位似图形有相同的形状，与直线位似的图形是直线；与圆位似的图形是圆；与多边形位似的图形是与它形状相

同的多边形。

就大小关系言，一般說，两位似图形的大小是不同的。特別的，位似成为平行移动时（平行移动可看作位似中心趋向无穷远，相似系数趋近于1的位似），以及逆位似的特殊情形——中心对称时，两图形的大小是相同的。但是两位似图形的大小，并非可取任意关系的。对应綫段之比必須为定比（即相似系数）。两图形的大小关系归结为受这个定比制约着的綫段的大小关系。而且可知，两图形中对应角是相等的，面积之比是等于定比的平方的。两位似图形其中一个可以看作由另一个放大或縮小若干倍而得来。

就位置关系言，两图形有相似位置。剖析之，即两图形置于这样的位置：首先，对应顶点联綫通过一定点；其次，对应綫段互相平行。

两相似图形是沒有位置要求的，而可以任意放置。

2° 对于几何图形性質的研究，平面几何学所使用的方法乃綜合法。它乃以一些真实性为已知的命題作为依据，經過邏輯推理，而导出的一些新的命題。

对于几何图形的性質的研究，在几何学中表现为做如下二方面的工作：一为解释名詞，即給表示被研究的图形或图形的关系的概念下定义；一为推証命題，即根据真实性为已知的命題，經過邏輯推理而导出新的命題，通过命題而揭露几何图形的性質。在几何学中，对几何图形性質研究的結果，通常是以如下三种形式的命題表现的：

(1) 証明題。它由假設和終結两部分組成，指出了几何图形在何种条件下会产生何种結論。

(2) 計算題。給出了几何图形中某些量的关系，而目标在于求另一些量。

(3) 作圖題：指出了几何图形必須符合的条件（形状条件。