湖北省九所师范专科学校
《初等数学研究及教学法》
教材协作编写组编

CHUDENGSHUXUE
ZHUANTIYANJIU

華中工学院出版社

初等数学专题研究

师范专科学校教学参考书

初等数学专题研究

（初中部分）

湖北省九所师范专科学校《初等数学研究及教学法》
教材协作编写组编

華中工学院出版社

初等数学专题研究

湖北省九所师范专科学校《初等数学研究及教学法》教材协作编写组编
责任编辑　赖毅敏

华中工学院出版社出版发行
（武昌喻家山）
新华书店湖北发行所经销
华中工学院出版社沔阳印刷厂印刷

开本：787×1092毫米 1/32　印张：3.5　字数：70,000
1987年6月第1版　1987年6月第1次印刷
印数：1—12 000
ISBN 7—5609—0038—0/O·6
统一书号：13255-073 定价：0.80元

内 容 简 介

本书是师范专科学校数学专业《初等数学研究及教学法》课程的教学参考书。

本书可作为师专学生在未来的教学工作中，开展第二课堂教学的辅导教材。因此，本书在初中数学内容的基础上难度有所提高，在解题的思想方法和技巧方面亦有所创新。并且，尽量选用最近国内外数学竞赛的题目为例题，分类归纳，使读者能学到某一类型问题的解题技巧和方法。同时也使读者了解初中数学竞赛的概况。

本书可供师专数学专业学生、初中数学教师以及爱好数学的中学生学习和参考。

序　言

初等数学训练，除了课堂教学这一主要形式外，还要通过其他渠道和其他形式进行。其中引导学生自学数学，开展丰富多彩的第二课堂活动，激发学生学习数学的兴趣，培养学生的抽象思维能力是很重要的。特别是培养学生自学数学的能力尤为重要。从高等学校的数学教学实践来看，凡是数学成绩优异的学生，一般都是在中学时代就具备了较好的数学自学能力和抽象思维能力，部分最拔尖的学生，可以说无一例外。

湖北省九所师专院校《初等数学研究及教学法》协编组编写《初等数学专题研究》，对初等数学（初中部分）中的一些重要内容，采用专题形式，从理论、方法和解题技巧等方面，把他们教学和研究中的丰富经验，归纳综合，通过许多典型例题，引导学生如何分析问题和解决问题。此书取材精炼，结构新颖，生动活泼，具有启发性，它是师范专科学校数学教学中一本很好的教学参考书，也是中学教学和学生课外学习的良师益友。

樊孝述

1986年10月于

华中工学院数学系

编者的话

《初等数学专题研究》（初中部分）是在湖北省黄冈师专、咸宁师专、郧阳师专、十堰大学、宜昌师专、孝感师专、鄂西大学、襄阳师专、荆州师专九所师专院校数学教学协作组领导下，由《初等数学研究及教学法》教材协作编写组编写的。

参加本书编写、讨论、修改的人员有王延熹副教授、庞正琳、杨德平（以下按姓氏笔划为序）王先阶、任金元、吕玉莲、李全英、李济洲、是伯元、张业成、袁明豪、胡增钰、胡兰田、彭咏松、董理银、樊恺等同志。

本书由王延熹、庞正琳、杨德平主编。

本书承蒙湖北省暨武汉市数学会理事、华中工学院数学系副系主任樊孝述副教授、廖绵琪同志参加主审，特此致谢。

编　者

1986年6月1日

目　录

序言
编者的话
第一讲　数学选择题试说…………………………（1）
第二讲　实数绝对值的两个性质及其应用…………（11）
第三讲　数迷探求…………………………………（16）
第四讲　参系数方程根的讨论……………………（23）
第五讲　关于对称方程组的特殊解法……………（34）
第六讲　函数的极值………………………………（42）
第七讲　关于整数的整除性问题…………………（50）
第八讲　平面几何题的代数解法…………………（65）
第九讲　平面几何题的三角证法…………………（71）
第十讲　添加辅助线的几种方法…………………（80）
第十一讲　求三角形中一类线段之比的方法………（93）
后记…………………………………………………（104）

第一讲　数学选择题浅说

选择题是数学试题中的一种形式，具有覆盖面广、题容量大、阅卷评分方便准确等优点。它既可考查数学基础知识、基本技能的灵活运用，又可考查运算能力(正确性和速度)，还可考查逻辑思维能力及推理判断能力。由于具备上述优点，所以它在我国的各种考试或数学竞赛中被广泛采用。

一、选择题的结构与类型

选择题的结构是由“命题”与“答案”两大部分组成的。就其形式看，一般可分为发散型、收敛型与平行型三种。发散型的形式为由少量条件列出多个结论，要求应试者选择正确结论；收敛型则是列出多个前提与少量结论，由应试者选择正确的前提；平行型是列出多个前提与多个结论，由应试者选择具有因果关系的前提与结论。三种类型都是要求应试者找出前提与结论之间的对应关系。

从选择题的性质看，它又可分为定性、定量与混合三种类型。定性型要求从命题条件判定所叙述的数学元素所具有的性质与关系；定量型偏重于对题中数学元素进行计算所得出的数学结论；混合型则对这两方面都有所要求。

如广西壮族自治区1983年初中数学竞赛试题第一大题中的第(4)小题：“数5^{1983}的最后三位数是(　)，(A)025、(B)125、(C)625”。是属于定量发散型的。同一大题中第(1)小题：

“设 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，$c=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}$，则（　　）成立，$(A)\ a<b<c$，$(B)\ c<b<a$，$(C)\ b<a<c$”．是属于定性发散型．而题：“对所有实数 a、b、c、x、y、z，其中 $x<a$，$y<b$，$z<c$．下列不等式：$(A)\ xy+yz+zx<ab+bc+ca$，$(B)\ x^2+y^2+z^2<a^2+b^2+c^2$，$(C)\ xyz<abc$，$(D)\ x^2y^2z^2<a^2+b^2+c^2$，$(E)\ x+y+z<a+b+c$．成立的是（　　）”，是属于定性收敛型的．

“已知函数(1)$|x|+3$，(2)$\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x$，(3)$2x$，(4)$3x^4$，(5)$\sin 2\pi x$，(6)$\cos 2\pi x+\cos 4\pi x$，(7)$-x^5$选择其中满足下列条件的函数填到括号中：

$(A)\ f(x)=-f(x)$，(　)，$(B)\ f(-x)=f(x)$，(　)，

$(C)\ f(x+2\pi)=f(x)$，(　)，$(D)\ f(x+1)=f(x)$，(　)，

$(E)\ f(x+1)=2f(x)$，(　)．”

是定性平行型的．

二、解选择题的途径

在各种类型的选择题中，最常见的是发散型的．下面就以发散型为例谈谈常见的几种解题方法：

（一）　*正推法*　将选择题按常规题的解法求解，把所得结果与供选择的答案进行比较，选择结果相同者的题号填入括号中．

例 1　（1984年天津市初中数学邀请赛）

已知方程 $2x^2+kx-2k+1=0$ 的两实根的平方和为 $\frac{29}{4}$，则 k 的值为 $(A)\ 3$；$(B)-11$；$(C)\ 3$ 或 -11；$(D)\ 11$；(E)以

上结果都不对。

选择前先按题设条件求 k。由已知得

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{29}{4}=\left(\dfrac{k}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{-2k+1}{2},\\ k^2+4\cdot2\cdot(2k-1)\geqslant0,\end{array}\right.\Longrightarrow k=3,\ (\text{与}(A)\text{同}),$$

故选择答案(A)。

一般地，由题目条件容易推出结论时，常用正推法。一些定性型的选择题，如“求方程解的个数”、“符合条件的点的个数”之类的题，以及平行型选择题一般都用正推法求解。

例 2 （1983年全国数学竞赛题）

在正方形$ABCD$所在平面内有点P，使$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PDA$都是等腰三角形，那么具有这样性质的P点个数有(A) 9 个；(B)17个；(C) 1 个；(D) 5 个。

先由题设条件推出满足条件的点在正方形内有 5 个，在正方形外有 4 个，共有 9 个，所以选择答案(A)。

例 3 （美国36届中学数学竞赛题）

设$[x]$表示小于或等于x的最大整数，则方程$4x^2-40[x]+51=0$的实数解的个数是(A) 0；(B) 1；(C) 2；(D) 3；(E) 4。

解 设$f(x)=4x^2-40[x]+51$。当$x<2$时，$f(x)\geqslant4x^2+11>0$，无实数解；当$2<x<3$时，原方程化为$4x^2-29=0$；得$x_1=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$；同理，$6<x<7$，$7<x<8$，$8<x<9$时方程各有一解 $x_2=\dfrac{\sqrt{189}}{2}$，$x_3=\dfrac{\sqrt{229}}{2}$，$x_4=\dfrac{\sqrt{269}}{2}$。故选择答案$(E)$。

一般选择题都要求在提供选择的三—五个答案中有且仅有一个是正确的，这一点对解这一类型的选择题就大有帮助，用它

我们就可采用一些特殊的方法来解。例如，上例如果不是认定它有且仅有一个正确的答案，那我们就还要证明只有4个实解。

（二） 筛选法（或称逐一否定法或排除法等）

由于供选择的答案中有且仅有一个是正确的，因此，我们先将较易判断是错误的答案排除掉，缩小范围，然后求得正确答案。

例4 （1983年福建省初中数学竞赛题）

已知一正数M的倒数$\frac{1}{M}$的常用对数的首数为a，尾数为b（$b\neq 0$）。则M的常用对数的首数和尾数应是(A)首数$-a$，尾数$-b$；(B)首数$1-a$，尾数$-1-b$；(C)首数$\frac{1}{a}$，尾数$\frac{1}{b}$；(D)首数$-a-1$，尾数$-b+1$。

解　正数M的对数尾数应为正数，故排除(A)、(B)。又正数M的对数尾数不可能大于1，从而排除(C)。因此选择答案(D)。

例5 （1983年福建省初中数学竞赛题）

满足等式$1983=1982x-1981y$的一组自然数是$(A)x=12785$，$y=12768$；$(B)x=12784$，$y=12770$；$(C)x=11888$，$y=11893$；$(D)x=1947$，$y=1945$。

解　从等式可知y必须为奇数，故排除(A)、(B)。由(C)计算末位得$2\times 8-1\times 3=13$，末位为3，再由(D)计算末位得$2\times 7-5=9\neq 3$。故选择(C)。

（三） 特殊数值判定法

对于条件和答案中都含有字母的选择题，一般可令字母为一些特殊数值，如0、1、-1等，代入条件和答案中计算，

数值相等或符合条件者便是答案。

例 6 （北京市1982年初二数学竞赛题）

化简$\frac{a^4-a^4b^2}{(a-b)^2}\div\frac{a(a+b)}{b^2}\times\frac{b^2}{a}$，其结果为$(A)\frac{a^2}{a-b}$，$(B)\frac{a^2}{a+b}$，$(C)\frac{b^2}{a-b}$，$(D)\frac{b^4}{a+b}$。

解　令$a=2$，$b=1$，代入原式得值为4，而$\frac{a^2}{a-b}=4$。故选择答案(A)。

例 7 （北京市1983年初三数学竞赛题）

对　$a>b>c>0$，　$m>n>0$（m，n是整数）成立的关系式是(A) $a^mb^n>b^nc^m>c^na^m$，(B) $a^mb^n>c^na^m>b^nc^m$，(C) $a^mc^n>a^mb^n>b^nc^m$，(D) $b^nc^m>c^na^m>a^mb^n$，(E) $a^mc^n>b^nc^m>a^mb^n$。

解　令$a=3$，$b=2$，$c=1$，$m=2$，$n=1$，

则 $a^mb^n=18$，$b^nc^m=2$，$a^mc^n=9$。

答案中五个式子仅仅(B)满足关系，故选择(B)。

例 8 （重庆市第一届初中数学竞赛试题）

设　$p=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n\text{个}}-\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}}$　（n为自然数），

则（A）p为无理数，（B）$p=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}$，（$C$）$p=\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}$，

（D）$p=\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}}$，（$E$）$p=\underbrace{77\cdots7}_{n\text{个}}$。

解　将n取特殊数值1，则$p=\sqrt{11-2}=3$，故选择（D）。

（四） 倒退法 先假定题中所给的几个答案中某个答案结论正确，看能否满足所给的条件，若能满足则将此答案代号填入所对应的题号中。

例 9 （1982年全国数学联赛试题）

一个凸多边形除了一个内角外，其余各内角之和是2750°，则那一个角是（A）150°，（B）105°，（C）120°，（D）130°，（E）144°.

解 多边形的内角和满足关系式：$(n-2)180°$，它是180°的整数倍。把130°进行检验，满足这个条件，故选择(D)。

例10 （1972年美国中学数学竞赛试题）

圆内接四边形的边长依次是25、39、52和60。这个圆的直径的长度（A）62，（B）63，（C）65，（D）66，（E）69.

解 假设直径为65，则由$25^2+60^2=65^2=39^2+52^2$。故应选择(C)。

请注意在运用倒退法时，遇到题目提供选择的答案中，有一个答案是“以上答案(结论)都不对”或“不同于(A)—(D)的答案”时，就要小心行事。很可能这一条是正确的。

例11 （1983年北京市初二数学竞赛题）

一个数等于它的倒数的四倍，这个数一定是（A）2，（B）1，（C）$\frac{1}{2}$，（D）-2，（E）以上答案都不对。

解 设这个数是2，则$2=4\times\frac{1}{2}$，但$-2=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，这样是$(A)$还是$(D)$还不能肯定，但题中有“一定”的要求，所以不能选择$(A)$或$(D)$，应选择$(E)$。

例12 （1982年北京市初中数学竞赛题）

三角形三边之长a、b、c满足关系式$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a-b+c}$，

则三角形一定是（A）等边三角形，（B）以 a 为底的等边三角形，（C）以 c 为底的等边三角形，（D）不等腰三角形，（E）以上结论都不对。

解　显然答案（A）和（C）均满足关系式 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a-b+c}$。故应选择（$E$）。

一般地，解选择题时应注意几种方法的综合运用。遵循先易后难，先简后繁的原则，灵活采用适当的方法，迅速作出判断，以便尽可能地提高解题速度，寻求出正确的答案。下面再补充几点说明：

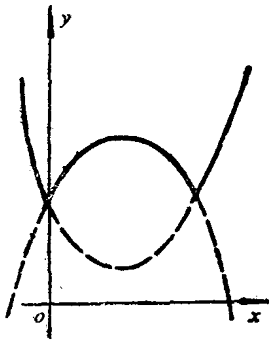
（1）由题设条件能容易得出结论时用正推法。平行型也多用正推法。在用正推法较困难时，宜即时改用其它方法。

（2）在选用倒推法时应全面地观察结论，认真地对照所给的条件，运用有关的知识提高预估的准确性，减少试验次数。如例 9 中，由条件$2750°+x°$应是$180°$的整数倍，并知这个数个位数字无疑是 0，因而是 2 的倍数，所以只要求这个数能被 9 整除即可，而2750的各数字之和为14，因此，只要选择一个个位数是 0 而各位数字之和为 4 或13的数倒推验证。所以预估选择（D）。又如例10中注意到数25、60、65恰好是一组勾股数，说明四边形两顶点的连线是直径，长度是65，进而由39、52、65一组勾股数也验证了这一点，从而确定（C）是符合条件的答案。从另一个角度看，这种考虑问题的方法也属于筛选法。用筛选法在缩小范围之后，还要对余下的答案逐一判定。

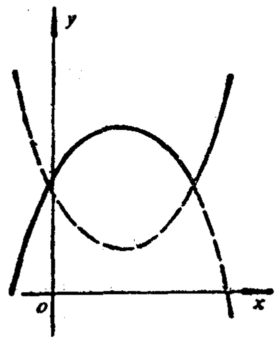
（3）对于特殊值判定法，在取字母的值时，要使代数式有意义且计算简便。有端点的应选取端点的值。一般判断图象属性的题可采用特殊数值法。

例13 （1985年全国初中数学竞赛题）

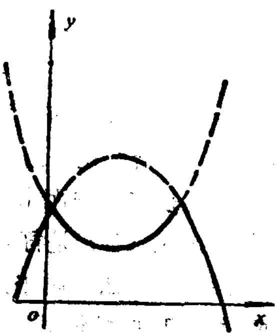
函数$y=1-|x-x^2|$的图象大致形状是：（A）图(1-1)中的实线部分；（B）图(1-2)中的实线部分；（C）图(1-3)中的实线部分；（D）图(1-4)中的实线部分。



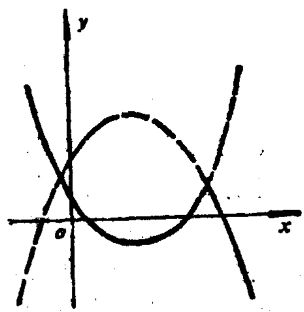
图(1-1)



图(1-2)



图(1-3)



图(1-4)

解 从图形看，只需判断图象与x轴交点的情况便可确定答案。故取$y=0$，得$1=|x-x^2|$，$x^2-x-1=0$或$x^2-x+1=0$，方程有两个根。故选择（C）。

最后必须注意，上面所介绍的方法都是对“所给的答案中有一个且仅有一个是正确的”这种类型的题而言。如果遇到含有“若是你认为答案都不正确，可填无”这种类型的题，一般都用正推法。用其它方法都需对答案逐一验证。即使用筛选法筛到剩下一个答案，这个答案也未必是“当然结论”，对它还要验证。

例14 《武汉科技报》举办的“初中理科知识有奖竞赛”中第61题。

若a、b、c为三角形三条边的长，设方程 $x(x+2b)=a(x^2-1)-c$有等根，则$a:b:c$为（A）1:2:3，（B）2:3:4，（C）3:4:5，（D）4:5:6。

解 显然（A）不符合条件（三角形两边之和必须大于第三边）。由倒推法可知（B）、（C）、（D）中均有符合条件的边，如$a=\frac{3}{5}$、$b=\frac{4}{5}$、$c=1$便是一组，故应在答案中填“无”。

练 习

1. 在一个平面内，点P和等边三角形ABC的顶点分别构成三个等腰三角形，那么点P的位置个数有（A）1；（B）4；（C）7；（D）10；（E）12。

2. 若$y=2x$，$z=2y$，那么$x+y+z$等于（A）x，（B）$3x$，（C）$5x$，（D）$7x$，（E）$9x$。

3. 若$|-a|>-a$，则（A）$a>0$，（B）$a<0$，（C）$a<-1$，（D）$-1<a<0$。

4. 在整数0、1、2、3、4、5、6、7、8、9中，奇数的个数为x，偶数的个数为y，完全平方数的个数为z，则$x+y+z$等于（A）14，（B）13，（C）12，（D）11，（E）10。

5．在$\triangle ABC$中，E是BC边的中点，D在AC边上．若AC的长是1，$\angle BAC=60°$，$\angle ABC=100°$，$\angle ACB=20°$，$\angle DEC=80°$．那么$\triangle ABC$的面积加上二倍的$\triangle CDE$的面积等于（A）$\frac{1}{4}\cos 10°$，（B）$\frac{\sqrt{3}}{8}$，（C）$\frac{1}{4}\cos 40°$，（D）$\frac{1}{4}\cos 50°$，（E）$\frac{1}{8}$．

6．求使得$(n-B)/(5n+6)$是一个非零的可约分数的最小正整数n为（A）45，（B）68，（C）155，（D）226，（E）不同于（A）—（D）的答案．

7．已知$\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$，且$0\leqslant x\leqslant \pi$．则$\operatorname{tg}x$是（$A$）$-\frac{4}{3}$；（$B$）$-\frac{3}{4}$；（$C$）$\frac{3}{4}$；（$D$）$\frac{4}{3}$；（$E$）按已知条件不能完全确定．