交換電路

顧博光 編著

大學圖書供應社

交換電路

中華民國67年9月初版

定價：*150*元

編著者	顧博光
發行人	林平南
出版者	國彰出版社
	地址：台中市文華路七三號
	局版台業字0226號
總經銷	大學圖書供應社
	地址：台中市文華路七三號
	電話：(042)240273
	郵政劃撥：中字23123號
印刷者	珠美打字印刷行
	地址：台中市進化路四八三號
	電話：(042)322422

序　言

交換電路是一門很實用的課程，凡電子、電機、電信、控制、計算機科學等學系都應修習。它理論與實際並重，故也是一門可深可淺的基礎課程。根據本人多年教學的經驗，學習交換電路跟選用的教科書很有關連。大部分的學校都採用原文書。而有很多原文書，編寫上不能說不好，但因爲語言障礙的關係，同學們學習起來很吃力。常常爲了一些較爲繁瑣的句子推敲不已，甚而誤入迷途，浪費了很多時間精力，以致把原先高昂的學習興趣打消了。也有些原文書編寫的方式不適合於工科的同學來修習，以致有很多人在學過了交換電路以後，但還是茫茫然不知如何來應用，很快的就忘了。本書的目的就是幫助同學們來學習，使同學們不必有語言上的障礙。並且本書是根據本人歷年的教學，參考很多教本，按照最適當的順序，重新編寫而成。

本書適用於大學院校、三專、二專、五專只要是專科以上學校，有交換電路或稱邏輯設計電路的課程，均可採用爲教本。當然教師們可以參照學生程度來作適當的刪減，本人建議凡五專、二專、三專選用本書當教本時，有星字（*）記號的章節可以不必講解。

本書除了理論部分外也選擇了很多新的材料如 *IC* 電閘 *IC* 正反器等以配合實驗。

本書所選的材料不敢說很充分，但保證足夠應用。本書不是翻譯式的編寫，作者本人花了很多功夫用很簡潔而又易懂的辭語來作有系統、清晰明白的敍述，以響應科學中化的運動。當然百密也有一疏的時候，若有誤漏，敬請不吝指教，再版時當加以改正。

顧　博　光

民國六十七年七月

目　錄

第一章　布爾代數

Boolean Algebra

所謂交換網路（ Switching Network ）就是一個具有m個輸入端及 n 個輸出端的物理系統，如圖 1 — 1 所示。在此系統中的輸出入端均可作一般物理量的測定。所測定出來的物理量，就被稱作**狀態**（ State ），交換理論（ Switching Theory ）就是研究交換網路中所顯示的輸出入狀態關係特性，以及網路本身內部的結構，彼此間之關連。也就是說學習了交換理論之後，我們可以根據網路的結構，觀察出輸出入狀態關係。同樣的針對某種輸出入狀態關係，我們可以設計出交換網路的結構來。而整個交換理論的數學基礎，就是**布爾代數**。

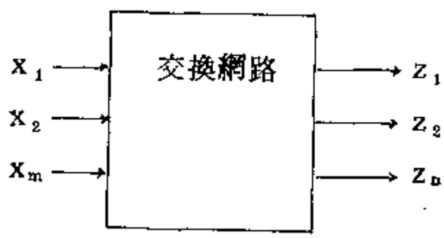

圖 1 — 1

布爾代數跟我們一般所熟悉的代數系統稍微不同，故為了避免混淆，學習布爾代數時，必須摒棄傳統代數的觀念。首先我們要了解布爾代數的數學體系。介紹布爾代數體系有很多方法，為了方便學習，我們從最簡單的**二值布爾代數**（ Two value Boolean Algebra ）開始介紹。俟大家對布爾代數有了認識之後，再逐步的用較抽象的數學定義，來建立完整的布爾代數體系，俾使大家對布爾代數有更深刻的認識，進一步的把布爾代數運用自如。

第一節　二值布爾代數

基本假設：二值布爾代數是一個集合，集合內只有0跟1兩個元素。兩個元素間可以有兩個**二元運算**（Birary Operation），及一個**單元運算**（Unary Operation）。其運算規則如下表：

表1

$0 \cdot 0 = 0$	$0 + 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$	$0 + 1 = 1$
$1 \cdot 0 = 0$	$1 + 0 = 1$
$1 \cdot 1 = 1$	$1 + 1 = 1$
$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$

定義1－1　布爾代數中的**單元運算**，稱之爲**反運算**（Not Operation）。

定義1－2　布爾代數中的**二元運算**以“・”代表的，叫做**和運算**（And Operation）。以“＋”代表的**二元運算**叫做**或運算**（OR Operation）。

定義1－3　**變數**是一種符號，只對應布爾代數中的兩個值0或1。此種變數稱之爲**布爾變數**（Boolean variable），也就是說，設若X爲布爾變數，則X不是0就是1。

定義1－4　凡由0或1或布爾變數，經由運算連結而成的代數式，稱之爲**布爾代數式**（Boolean expression）。以後也簡稱**代數式**。

布爾代數式的**式值**也是只有0跟1兩個值。一般代數式型式如下：

$\overline{0}$, $X+0$, $X+\overline{0}$

$\overline{1}$, $X+1$, $X+\overline{1}$

$X \cdot 1$, $X \cdot \overline{1}$, $X \cdot \overline{0}$

$X+Y+Z$, $X \cdot Y+Z$

$X \cdot (Y+Z)+Y \cdot Z$

※※注意：括號（　）不是運算，只是用來區別運算的先後順序，以免混淆而已。

定義 1－5　**對偶**（Dual）就是在一個代數式中，把**和運算符號**跟**或運算符號相互交換**，同時也把代數式中的O跟1**相互交換**。把這些交換視作運算則稱之為**對偶化**（Dual operation）。**對偶化**所得的代數式跟原來的代數式互稱為**對偶式**（Dual expression）。

定義 1－6　兩個代數式經過**或運算**後其值為1，經過**和運算**後其值為O，則稱此**兩代數式互補**（Complement）。也就是設若 A、B 為代數式，則 $A+B=1$, $A \cdot B=0$，則稱 A、B **互補**。若對於同一個變數 X 而言，$X+\overline{X}=1$，$X \cdot \overline{X}=0$。故 X 跟 $\overline{X}$ **互補**。對於同一個變數而言把互補視作**運算**（稱**補數化**）則跟**反運算**同義。

定義 1－7　變數 X 及 $\overline{X}$ 互補，但 $\overline{X}$ 可視由 X **反運算**得來的結果，故不考慮**運算符號**則 X 跟 $\overline{X}$ 屬同一個**文字**(Literal)。任何一個**代數式**至少是一個**文字**以上。

第二節　布爾代數與邏輯語言的關係

邏輯是一種思考的法則，邏輯學不僅提到一些常見的謬誤，也告訴我們推論的正確方式。它所牽涉的範圍很廣，其中有一支專門討論邏輯語言。在邏輯語言中有所謂命題求值（Calculus of proposition），就是用來討論一個命題的眞假值。而這些命題是由一些宣告（Declaration）（即是具有眞或假二值的一些句子）加上連接辭語（Connector）所組成的。布爾代數中的 0 或 1 二值，相當於邏輯語言中的眞或假；和運算，或運算及反運算相當於連接語邏輯和，邏輯或及邏輯反。故布爾代數也可用在邏輯語言的描述。學習布爾代數不僅可應用在交換網路的設計，也可想法用在其他方面諸如一般法令規章的簡化，及新語言的創造等。

但要特別當心的是學習布爾代數跟學習邏輯學不同。學習邏輯學也不必一定要學布爾代數。尤其是邏輯學跟語義學有很密切的關係，在不很熟悉的語言系統，會有很多的不方便。故我們不願多予討論以免分散讀者太多的注意力。

第三節　定理（Theorem）

明瞭了二值布爾代數的基本體系之後，我們可以演繹出很多的定理。利用這些定理，我們可以把一些複雜的代數式簡化，或轉換成其它等值的代數式。

1 A　　$0 \cdot X = 0$

1 B　　$1 + X = 1$

在一般代數中　用**代值法**來證明一個定理是否成立，通常較爲艱鉅。因爲首先要考慮變數的數值是否有限。若變數值無限，則必須使用**數學歸納法**（induction）才能證明。縱使變數值有限，要把衆

多變數各種不同數值的組合逐一考慮，也是費時費事。但在二值布爾代數中，用**代值法**來證明却簡單明瞭，因為變數值為兩個，故很容易窮舉而得到證明。

定理 1 A 可以證明如下：

若 $X=0$，則 $0\cdot X=0\cdot 0=0$　定理成立。

若 $X=1$，則 $0\cdot X=0\cdot 1=0$　定理成立。

因 X 只有 0 及 1 兩個值，故　$0\cdot X=0$　之定理恆成立。

同理，定理 1 B 也可以用**代值法**得到證明。讀者請自行證明之。

2 A　　$1\cdot X=X$

2 B　　$0+X=X$

定理 2 A 用**代值法**證明如下：

若 $X=0$，則 $1\cdot X=1\cdot 0=0=X$　定理成立。

若 $X=1$，則 $1\cdot X=1\cdot 1=1=X$　定理成立。

故不論 X 是 0 或是 1，定理 $1\cdot X=X$　恆成立。

同理，2 B 也可由**代值法**直接證明之。

3 A　　$X\cdot X=X$

3 B　　$X+X=X$

要證明定理 3 A，也是用**代值法**證明如下：

若 $X=0$，則 $X\cdot X=0\cdot 0=0=X$　定理成立。

若 $X=1$，則 $X\cdot X=1\cdot 1=1=X$　定理也成立。

故不論 X 是 0 或是 1，定理 $X\cdot X=X$　恆成立。

同理，用**代值法**也可證明定理 3 B。

4 A　　$X\cdot\overline{X}=0$

4 B　　$X+\overline{X}=1$

定理 4 *A* 用**代值法**證明如下：

若 $X=0$，則 $X\cdot\overline{X}=0\cdot\overline{0}=0\cdot 1=0$　定理成立。

若 $X=1$，則 $X\cdot\overline{X}=1\cdot\overline{1}=1\cdot 0=0$　定理成立。

故不論 X 是 0 或是 1，定理　$X\cdot X=0$　恒成立。

同理用代值法，定理 4 *B* 也可得證。

到目前爲止，看了上述四個定理。每個定理的 *A* 部份跟 *B* 部份都很類似，並且，剛好兩者之間滿足**對偶化**的關係。由此我們初步可以歸納一個結論；就是「**把一個定理對偶化後可以得出另一個新定理**」。上述的結論我們稱之爲「**對偶原理**」（Prin ciple of dual ity）。「**對偶原理**」能否成立，尚須更進一步的證明。

要證明「**對偶原理**」我們可以再回頭來看我們對二値布爾代數的基本假設。在把 0 跟 1 互換，[和] **運算符號**跟 [或] **運算符號**互換後，則 [和] **運算規則**跟 [或] **運算規則**剛好對調。故**對偶化**並沒有改變原來代數的體系，也就是說基本假設未變。而定理是由基本假設推演得來的，卽然基本假設未變，當然定理成立。故「**對偶原理**」可以充分的得到證明。

爲了純熟應用以上四個定理，我們可看以下幾個例子。

例 1.　$0\cdot(A+B)=0$

例 2.　$1\cdot(A+B)=A+B$

例 3.　$A\cdot A\cdot B=A\cdot B$

例 4.　$A+A+B=A+B$

例 5.　$A\cdot\overline{A}\cdot B=0\cdot B=0$

例 6.　$A+A+B=1+B=1$

例 7.　$(A+\overline{A})\cdot B=1\cdot B=B$

例 8.　$A\cdot\overline{A}+B=0+B=B$

5 A　　$X \cdot Y = Y \cdot X$

5 B　　$X + Y = Y + X$

定理五稱之爲**交換律**（Comhutatvc law）。用**代値法**證明定理5 A如下：

因X，Y均爲二値，故有四種情形。

(1)$X = 0$，$Y = 0$，則$X \cdot Y = 0 \cdot 0 = 0$　而$Y \cdot X = 0 \cdot 0 = 0$　故$X \cdot Y = Y \cdot X$

(2)$X = 0$，$Y = 1$，則$X \cdot Y = 0 \cdot 1 = 0$　而$Y \cdot X = 1 \cdot 0 = 0$　故$X \cdot Y = Y \cdot X$

(3)$X = 1$，$Y = 0$，則$X \cdot Y = 1 \cdot 0 = 0$　而$Y \cdot X = 0 \cdot 1 = 0$　故$X \cdot Y = Y \cdot X$

(4)$X = 1$，$Y = 1$，則$X \cdot Y = 1 \cdot 1 = 1$　而$Y \cdot X = 1 \cdot 1 = 1$　故$X \cdot Y = Y \cdot X$

不論X或Y的値是0或1，$X \cdot Y = Y \cdot X$。

同理，定理5 B　$X + Y = Y + X$也可成立。

6 A　　$X \cdot Y \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$

6 B　　$X + Y + Z = X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$

定理六稱之爲**結合律**（associative law）。用**代値法**證明定理6 A如下：

設若$X = 0$，則$X \cdot Y \cdot Z = 0 \cdot Y \cdot Z = 0 \cdot Z = 0$，

而$X \cdot (Y \cdot Z) = 0 \cdot (Y \cdot Z) = 0$，

$(X \cdot Y) \cdot Z = (0 \cdot Y) \cdot Z = 0 \cdot Z = 0$

故$X = 0$時，定理成立。

設若$X = 1$，則$X \cdot Y \cdot Z = 1 \cdot Y \cdot Z = Y \cdot Z$，

而$X \cdot (Y \cdot Z) = 1 \cdot (Y \cdot Z) = Y \cdot Z$，

$(X \cdot Y) \cdot Z = (1 \cdot Y) \cdot Z = Y \cdot Z$，

故 $X = 1$ 時，定理也成立

故不論 X 是 0 或 1，定理 6 A 恆成立。

同理，定理 6 B $X + Y + Z = (X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ 亦可成立。

7 A $\overline{X \cdot Y \cdots\cdots Z} = \overline{X} + \overline{Y} + \cdots\cdots + \overline{Z}$

7 B $\overline{X + Y + \cdots + Z} = \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \cdots\cdots \cdot \overline{Z}$

定理七的證明，我們可以先從兩個變數的情形開始。若只有 X 及 Y 兩個變數，要證明 $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$ 可用**代值法**證明如下：

若 $X = 0$，則 $\overline{X \cdot Y} = \overline{0 \cdot Y} = \overline{0} = 1$

而 $\overline{X} + \overline{Y} = \overline{0} + \overline{Y} = 1 + \overline{Y} = 1$　故 $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

若 $X = 1$，則 $\overline{X \cdot Y} = \overline{1 \cdot Y} = \overline{Y}$

而 $\overline{X} + \overline{Y} = \overline{1} + \overline{Y} = 0 + \overline{Y} = \overline{Y}$　故 $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

故兩個變數時，定理7 成立。擴充至三個變數時，則使用定理 6，演繹如下：

$$\overline{X \cdot Y \cdot Z} = \overline{(X \cdot Y) \cdot Z} = \overline{X \cdot Y} + \overline{Z} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

依此數推，從三個變數可推至任何 n 個變數。甚至 X，Y，Z 爲一般代數式，定理七均可成立。

8 $\overline{f}(X, Y, \cdots\cdots, Z, \cdot, +) = f(\overline{x}, \overline{y}, \cdots\cdots, \overline{z}, +, \cdot)$

定理 8 完全是由定理 7 所直接得出的結論。

9 A $XY + XZ = X(Y + Z)$

9 B $(X + Y)(X + Z) = X + YZ$

定理 9 一般稱之爲**分配律**。即“ · ”**運算**對於“ + ”**運算**滿足**分配律**（ distributive law ）。同理“ + ”**運算**對“ · ”**運算**也滿足**分配律**。用**代値法**證明定理 9 A 如下：

若 $X=0$，則 $XY+XZ=0Y+0Z=0+0=0$

而 $X(Y+Z)=0(Y+Z)=0$

故 $XY+XZ=X(Y+Z)$。

若 $X=1$，則 $XY+XZ=1Y+1Z=Y+Z$

而 $X(Y+Z)=1(Y+Z)=Y+Z$

故 $XY+XZ=X(Y+Z)$。

故不論 X 是 0 或是 1，定理 9 A 均能成立

同理定理 9 B 亦成立。

10 A　　$XY+X\overline{Y}=X$

10 B　　$(X+Y)(X+\overline{Y})=X$

定理 10 A 的證明不必用**代値法**，可由定理 9 直接演繹如下：

$$XY+X\overline{Y}=X(Y+\overline{Y})=X\cdot 1=X$$

11 A　　$X+XY=X$

11 B　　$X(X+Y)=X$

定理 11 稱之爲**吸收律**（ absorption law ），用**代値法**證明如下：

若 $X=0$，則 $X+XY=0+0\cdot Y=0+0=0=X$　定理成立。

若 $X=1$，則 $X+XY=1+1\cdot Y=1+Y=1=X$　定理亦成立。

故不論 X 是 0 或是 1，定理 11 A 恆成立。

同理可證明定理 11 B 。

12 A $\quad X+\overline{X}Y=X+Y$

12 B $\quad X\cdot(\overline{X}+Y)=XY$

要證明定理 12 A ，可利用定理 9 B，即“＋”運算對“•”**運算**滿足**分配律**。

故 $X+\overline{X}Y=(X+\overline{X})(X+Y)=1\cdot(X+Y)=X+Y$

定理成立。

讀者也可用**代值法**來證明定理 12 A 。請自行證明之。

在定理 12 B 中，$X\cdot(\overline{X}+Y)=X\cdot\overline{X}+X\cdot Y=0+XY$
$=XY$

以上的演繹也利用了定理 9 A。即“•”**運算**對“十”**運算**滿足**分配律**。

13 A $\quad XY+\overline{X}Z+YZ=XY+\overline{X}Z$

13 B $\quad (X+Y)(\overline{X}+Z)(Y+Z)=(X+Y)(\overline{X}+Z)$

用**代値法**證明定理 13 A 如下：

設 $X=0$，則 $XY+\overline{X}Z+YZ=0Y+\overline{0}Z+YZ=0+Z$
$+YZ=Z$。

而 $XY+\overline{X}Z=0Y+\overline{0}Z=0+Z=Z$。

故 $XY+\overline{X}Z+YZ=XY+\overline{X}Z$ 定理成立。

設 $X=1$，則 $XY+\overline{X}Z+YZ=1Y+\overline{1}Z+YZ=Y+0Z$
$+YZ=Y+YZ=Y$。

而 $XY+XZ=1Y+\overline{1}Z=Y+0Z=Y+0=Y$。

故 $XY+\overline{X}Z+YZ=XY+\overline{X}Z$ 定理成立，

故不論 X 是 0 或是 1，定理 13 A 恒能成立。

同理定理 13 B 亦成立。