高等学校专科教材

高等数学学习指导

广东工业大学应用数学系 编

华南理工大学出版社

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

高等学校专科教材

高等数学学习指导

广东工业大学应用数学系　编

華南理工大學出版社

·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/广东工业大学应用数学系编.—广州：华南理工大学出版社，2003.10

ISBN 7-5623-2008-X

Ⅰ.高…　Ⅱ.广…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 082231 号

总 发 行：华南理工大学出版社
(广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640)
发行部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn
http://www2.scut.edu.cn/press
责任编辑：潘宜玲
印 刷 者：广州市新明光印刷有限公司
开　　本：850×1168　1/32　**印张**：13.25　**字数**：332 千
版　　次：2003 年 10 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1～3500 册
定　　价：22.50 元

前　言

在科学技术飞速发展的今天，人们越来越意识到数学的重要。数学不仅在各行各业中有着广泛的应用，而且在培养具有创新能力的人才中具有不可替代的作用。因此数学在高等继续教育的工科类、经济类、管理类的教学计划里占有重要的地位。基于此，广东工业大学高等继续教育学院组织部分有几十年丰富经验的教师成立了教材编写组，依照教育部颁布的现行"高等数学"课程教学的基本要求，编写了《高等数学》(上下册)教材。为了指导学生学习，相应地编写了与教材配套的《高等数学学习指导》。

本指导书具有如下特色：

一是可读性。全书力求做到与教材紧密相连，内容比较丰富，有疑难解答、例题演示、习题提示等。通过本书的学习，学生不仅可以巩固所学的知识，而且可以从中学到更多的解题方法与技巧。

二是针对性。书中疑难解答部分是针对学生遇到的问题加以解答，有的题目有助于学生加深对概念的理解与消化，澄清一些模糊的认识；有的题目有助于学生进行系统的复习与归纳。例题演示部分是针对学生的学习，将解题方法进行归纳与引申，以提高学生的综合解题能力。习题提示部分的习题均来源于教材，通过提示启发学生的思路，开拓学习的视野。

三是适用性。为了提高学生《高等数学》统考的应试能力，本指导书末还附有2000～2002年成人高等学校专升本招生全国统一考试《高等数学》(二)试题及2002年上半年、下半年高等教育自学考试全国统一命题考试《高等数学》(一)试题，并附有参考答案。学生在学完教材与指导书后，可做些试题，以衡量学习的效果，巩

固所学的知识，进而提高运算与自学等各种能力。

本指导书作为试用教材在广东工业大学继续教育学院使用了3年。此次在全面修改的基础上正式出版。

本书由华南理工大学汪国强教授担任主审。广东工业大学高等继续教育学院有关负责同志对教材的编写与出版工作给予了具体指导与帮助，广东工业大学应用数学系对我们的工作也给予了大力支持。谨在此向他们表示衷心的感谢。

参加本指导书编写工作的有张式强、徐志庭、郝同壬、陈耀灼、吴为汉等同志。尽管编者有力求把书编好的愿望，但限于编者的水平，书中难免有不妥之处，敬请同行批评指正。

编　者

2003年6月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

一、疑难解答

问题 1　如何理解函数概念?

答　教材中给出了函数的定义"设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集.如果对于每个数 $x \in D$,变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作:$y=f(x)$.数集 D 叫做这个函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量."

为了便于理解这个函数定义,我们可以把函数想像成一个数字处理装置,当我们输入(定义域的)一个值 x,则有(值域中的)确定的值 $f(x)$ 输出.如图 1-1.

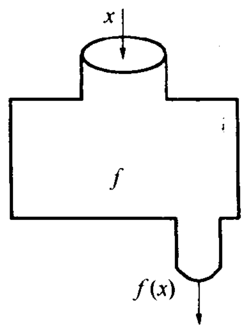

图 1-1

可见 f 与 $f(x)$ 是有区别的.f 表示对应法则,$f(x)$ 表示 x 对应的函数值.也常用 $f(x)$ 表示 y 是 x 的函数.$f(x)$ 什么时候表示函数,什么时候表示函数值,即 $f(x)$ 什么时候表示变量,什么时候表示常量,可根据上下文确定.

定义中指 y 有"确定的数值"与 x 相对应,这种对应可以是一对一,也可以一对多,甚至是一对无穷.如果对于定义域中每一个 x 值,仅有一个 y 值与之对应,这种函数称为单值函数,如 $y=x^2$,$y=\sin x$,$y=1$;如果有多个(包含无穷多个)y 值与之对应,这种函

数称为多值函数,例如 $y=\pm\sqrt{2x-1}$, $y=\mathrm{Arcsin}x$. 可见"确定的数值",可以是单值对应,也可以是多值对应.

对于多值函数,通常限制 y 的取值范围使之成为单值. 例如 $y=\mathrm{Arcsin}x$, 如果限制 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$, 便得单值函数 $y=\arcsin x$, 称为 $y=\mathrm{Arcsin}x$ 的主值. 又如方程 $x^2+y^2=1$ 定义了一个双值函数,若限制 $y\leqslant 0$ 时,得单值函数 $y=-\sqrt{1-x^2}$. 在高等数学中重点研究单值函数.

由函数定义得知"函数"是由定义域、值域及自变量到因变量的对应法则三部分组成,简称函数定义三要素. 事实上,一个函数只要知道它的定义域及表达自变量到因变量的对应法则,这个函数就确定了. 因为对于定义域中每一个 x 值根据对应法则,就可以找到相应的函数值,由此得到的全体数值,就是函数的值域.

对于一个实际问题,首先根据问题提出的量与量之间的关系的条件,建立自变量与因变量之间关系的对应法则,再根据问题的实际意义确定函数的定义域,这样函数就完全确定了.

例 将长为 10cm、宽为 6cm 的矩形铁片剪掉四个正方形,然后把四边折起来做成一个无盖铁盒. 求剪去正方形的边长与铁盒容积的函数关系.

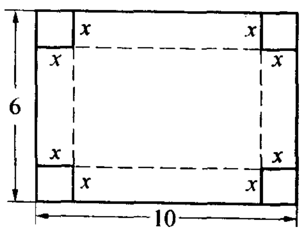

图 1-2

解 如图 1-2,设剪去的正方形的边长为 $x$cm,铁盒容积为 V.

$$\begin{aligned}\text{容积 } V &= \text{底面积}\times\text{高}\\ &=(6-2x)(10-2x)x\end{aligned}$$

根据此问题的实际意义,x 的变化范围是(0,3),即

$$V=(6-2x)(10-2x)x,x\in(0,3)$$

问题 2 函数有哪几种表示法?

答 我们知道对应法则是函数概念中三要素之一.它的表达方式并非惟一,可用图形来表示,可用表格来表示,也可用数学式子来表示,即通常所说的函数三种表示法.

如果对应法则可用自变量 x 的算式 $y=f(x)$ 明显表示,这样的函数叫做显函数,如 $y=2x+1,y=\sin x$ 等.

如果对应法则由 x 和 y 之间的方程 $F(x,y)=0$ 来确定,这样的函数叫做隐函数,如 $\sin(x+y)-x-y=0,e^y+xy-e=0$ 等.

如果对应法则可用关于参数 t 的两个算式表达,如

$$\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

又如

$$\begin{cases}x=v_1t\\y=v_2t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant T)$$

这样的函数叫做由参数方程所确定的函数.

如果对应法则可依定义域的取值有不同的表达形式,如

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\-x, & x<0\end{cases}$$

$$Y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$$

这样的函数称为分段函数.

以后我们将会见到函数还有其他表达形式,如 $y=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{t}\right)^t,y=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,y=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$.

因此，按对应法则表达形式，函数有如下多种表示法：

$$\text{函数表示法}\begin{cases}\text{图示法}\\ \text{表格法}\\ \text{公式法}\begin{cases}\text{显函数}\ y=f(x)\begin{cases}\text{用一个公式表示}\\ \text{用多个公式表示}\begin{cases}\text{参数方程表示的函数}\\ \text{分段函数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{隐函数}\ F(x,y)=0\end{cases}\end{cases}$$

问题 3 如何判别两个函数具有相同的对应法则？两个函数在什么情况下相等？

答 函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$，只要定义域相同，对于其内任一 x 值，对应的函数值总满足 $f(x)=g(x)$，我们就说它们的对应法则相同. 至于它们的表达方式如何，表达方法的繁简程度如何等是无关紧要的. 例如，$y=\sin 2x$ 和 $y=2\sin x\cos x$ 两个函数，它们的定义域同为 $(-\infty,+\infty)$，对定义域中任一实数 x，恒有 $\sin 2x=2\sin x\cos x$，因此这两个函数的对应法则被认为是完全相同的.

函数的实质是对应关系，自变量和因变量用什么字母表示是无关紧要的. 只要三要素（定义域、值域、对应法则）都相同的两个函数，就是相等的函数. 例如，下列三组函数就是相等的函数.

例 1 $y=\sin x$，$s=\sin t$（自变量、因变量所表示的字母不同）.

例 2 $y=\cos 2x$，$y=\cos^2 x-\sin^2 x$（表达方式不同）.

例 3 $y=|x|$，$y=\sqrt{x^2}$（表达方式不同）.

问题 4 如何求出函数的定义域呢？

答 一般来说，求函数的自然定义域，实际是解不等式组的问题. 函数的表达形式不同，求函数定义域的方法也有不同. 求由公式法（由分析式子）表示的函数的定义域是使该分析表达式有意义的一切实数所构成的集合. 求定义域时应注意以下几条原则：

(1) 如果函数的表达式中含有分式，则分式的分母不能为零.

(2)如果函数的表达式中含有偶次方根,则根号下的表达式必须大于或等于零.

(3)如果函数的表达式含有对数,则真数必须大于零.

(4)如果函数的表达式中含有反正弦函数或反余弦函数,则必须符合反正弦函数与反余弦函数的定义域.例如,对于 $\arcsin(4x-1)$,必须 $|4x-1|\leqslant 1$.

例 1 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$的定义域.

解 此函数是函数$\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$与函数 $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$的和.它的定义域是这两个函数的定义域的交集.可由解不等式组

$$\begin{cases}2-x^2>0\\ \left|\dfrac{1}{2}x-1\right|\leqslant 1\end{cases}$$

求出.其定义域 $D=(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cap[0,4]=[0,\sqrt{2})$.

例 2 求分段函数 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant 2\\ \sin x, & 2<|x|<3\end{cases}$的定义域.

解 分段函数的定义域,等于各段函数定义域的并集.第一段为 $|x|\leqslant 2$,即 $-2\leqslant x\leqslant 2$.第二段为 $2<|x|<3$,相当于解不等式组:

$$\begin{cases}2<|x|\\ |x|<3\end{cases},\quad 即\begin{cases}x>2 或 x<-2\\ -3<x<3\end{cases}$$

亦即 $\begin{cases}x>2\\ -3<x<3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-2\\ -3<x<3\end{cases}$

故为 $2<x<3$ 或 $-3<x<-2$

第一段与第二段定义域之并集为该函数的定义域 $D=(-3,3)$.

例 3 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,求 $f(x+a)-f(x-a)(a>0)$的定义域.

解 解不等式组$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$，可得$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$.因为$a>0$,所以,当$1-a<a$,即$a>\frac{1}{2}$时,不等式组无解;当$1-a\geqslant a$,即$a\leqslant\frac{1}{2}$时,不等式组有解,$a\leqslant x\leqslant 1-a$.从而得$f(x+a)-f(x-a)$的定义域$D=[a,1-a]$.

问题5 如何求出函数的值域?

答 求函数的值域,就是求出全体函数值组成的集合W.一般有三种方法:①反函数法,求函数的值域,即是求反函数的定义域;②图示法;③定义法,即求因变量的变化范围.

例1 求下列函数的值域:

(1)$y=\sqrt{\frac{4x+3}{x-3}}$;　　　　(2)$y=\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}$.

解 (1)先求出反函数.由$y^2=\frac{4x+3}{x-3}(y\geqslant 0)$解出$x=\frac{3(1+y^2)}{y^2-4}$,即反函数为

$$y=\frac{3(1+x^2)}{x^2-4}\quad(x\geqslant 0)$$

此函数定义域为$0\leqslant x<2,2<x<+\infty$,故所求函数的值域

$$W=\{y|0\leqslant y<2\text{ 或 }2<y<+\infty\}$$

(2)先求反函数为

$$y=\frac{(x-2)\pm\sqrt{(2-x)(3x-10)}}{2(2-x)}$$

$$\text{由}\begin{cases}(2-x)(3x-10)\geqslant 0\\x\neq 2\end{cases}\quad\text{得}\quad\begin{cases}2\leqslant x\leqslant\frac{10}{3}\\x\neq 2\end{cases}$$

反函数定义域为$2<x\leqslant\frac{10}{3}$.故所求的值域为

$$W=\left\{y|2<y\leqslant\frac{10}{3}\right\}$$

例 2 求函数 $y=\begin{cases}0, & -3<x\leqslant 0\\ x+1, & 0<x<2\\ 3-x, & 2<x\leqslant 3\end{cases}$ 的值域 W.

解 通过作函数图形求出值域. 由图 1-3 可见值域 $W=[0,1)\cup(1,3)$.

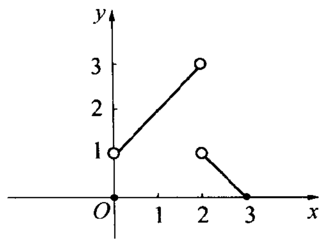

图 1-3

例 3 求函数 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2-1}+3$ 的定义域 D 及值域 W.

解 由不等式组 $\begin{cases}1-x^2\geqslant 0\\ x^2-1\geqslant 0\end{cases}$ 求得定义域 $D=\{-1,1\}$,因而求得值域 $W=\{2,4\}$.

问题 6 如何求出函数的表达式?

答 根据不同的已知条件,求表达式的方法也不同.

(1)已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式,求函数 $f[g(x)]$ 的表达式,可使用代入法.

例 1 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$, $g(x)=1-x$,求 $f[g(x)]$、$f[f(x)]$、$g[f(x)]$ 及 $g[g(x)]$ 的表达式,并指出它们的定义域.

解 $f[g(x)]=\dfrac{1-(1-x)}{1+(1-x)}=\dfrac{x}{2-x}\quad(x\neq 2)$

$$f[f(x)]=\frac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}=x\quad(x\neq -1)$$

$$g[f(x)]=1-\frac{1-x}{1+x}=\frac{2x}{1+x}\quad(x\neq -1)$$

$$g[g(x)]=1-(1-x)=x\quad(-\infty<x<+\infty)$$

(2)已知 $f[g(x)]$的表达式,求 $f(x)$的表达式.

这是上一种情况的反问题.求解的一般方法是令 $g(x)=u$,解出 $x=\varphi(u)$,求出 $f(u)$的表达式,再将 u 换为x,即得 $f(x)$的表达式.但由于要从 $g(x)=u$ 反解 x,有时很繁,甚至不易解出,这时根据所给表达式凑成 $g(x)$的函数就变得简单多了.

例 2 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$,求 $f(x)$的表达式.

解 方法 1:令 $u=e^x+1$,解得 $x=\ln(u-1)$,于是原式成为

$$f(u)=e^{2\ln(u-1)}+e^{\ln(u-1)}+1=(u-1)^2+(u-1)+1$$
$$=u^2-u+1$$

将 u 换成x,得 $f(x)=x^2-x+1$.

说明:函数 $f(u)=u^2-u+1$ 与函数 $f(x)=x^2-x+1$ 三个要素相同,它们是两个相同的函数.

方法 2:此题也可直接将 $f(e^x+1)$凑成(e^x+1)的函数,即

$$f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1=(e^x+1)^2-(e^x+1)+1$$

所以
$$f(x)=x^2-x+1$$

(3)根据图形建立函数的分析表达式.

例 3 二次抛物线的图形如图 1-4所示,试求它的方程.

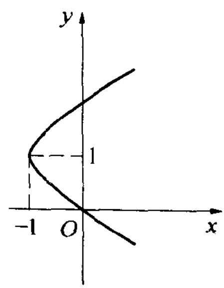

图 1-4

解 由图可知,抛物线的顶点为$(-1,1)$,对称轴为直线 $y=1$,开口向右,且过点$(0,0)$、$(-1,1)$和$(0,2)$.因此抛物线方程具有形式 $x=ay^2+by+c$.将点$(0,0)$、$(-1,1)$、$(0,2)$代入上方程,得

$$\begin{cases}c=0\\a+b+c=-1\\4a+2b+c=0\end{cases}$$

解得 $a=1,b=-2,c=0$,故所求抛物线方程为

$$x = y^2 - 2y$$

此题也可由图直接设抛物线方程为 $x = y^2 + by$.

(4)建立实际问题中的函数关系表达式.

如何建立实际问题中的函数关系，通常并无一般的方法可循，只能具体情况具体分析找出等量关系.在较简单的情况下，主要涉及一些几何与物理方面的知识.下面举两个比较简单的例子予以说明.

例 4 一容积为定量 V 的有盖圆柱形油桶.试建立油桶的全表面积 A 与油桶半径 r 之间的函数关系.

解 设油桶的高为 h，则油桶的容积 $V = \pi r^2 h$，全表面积为 $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.为求得全表面积 A 与半径 r 之间的函数关系，需从 V 的表达式中解出 $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$，将它代入 A 的表达式中，便得油桶全表面积 A 与油桶半径 r 之间的函数关系：

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \quad (0 < r < +\infty)$$

例 5 在水平路面上，用力 F 拉一重量为 G 的物体.设物体与路面间的动摩擦因数为 μ，试将力 F 的大小表示成它与路面所成角度 θ 的函数(图 1－5).

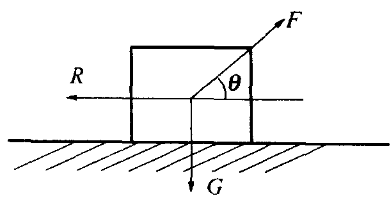

图 1－5

解 这里重量 G 和动摩擦因数 μ 均为常量.

现把力 F 分解为平行和垂直于路面的两个分力 $F\cos\theta$ 和 $F\sin\theta$，那么物体对路面的压力 $P = G - F\sin\theta$.又设摩擦力为 R，则由物理知识知道其大小为 $R = \mu P$，即

$$R = \mu(G - F\sin\theta)$$

要使物体由静止开始移动,水平分力 $F\cos\theta$ 必须与摩擦力平衡,即 $R = F\cos\theta$,由此得

$$\mu(G - F\sin\theta) = F\cos\theta$$

从上式解出 F,便得力 F 与角 θ 之间的函数关系式

$$F = \frac{\mu G}{\cos\theta + \mu\sin\theta} \quad \left(0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

问题 7 怎样判别一个函数是不是周期函数?

答 判别函数周期性的方法很多,现介绍常采用的三种方法.

(1)假设 $f(x)$ 是周期函数,满足 $f(x+l)=f(x)$. 取 $x=x_0$,得 $f(x_0+l)=f(x_0)$,把它看做以 l 为变量的方程. 如果方程的全部解 $l=l_i(i=1,2,\cdots)$,然后逐个检验 l_i 是否满足方程 $f(x+l)=f(x)$. 如果存在某个 l_i 能使上述方程成立,则它就是 $f(x)$ 的周期;否则不是周期函数.

(2)假设 $f(x)$ 是周期函数,则方程 $f(x)=0$ 的根必呈周期性,否则便是非周期函数.

(3)因为周期函数的定义域无上界,也无下界,所以若某个函数定义域有上界或有下界时,便是非周期函数.

例 1 判断 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$是不是周期函数?

解 利用(1)求解. 解方程

$$A\sin[\omega(x_0+l)+\varphi] = A\sin(\omega x_0+\varphi)$$

即 $$A\sin(\omega x_0+\omega l+\varphi) - A\sin(\omega x_0+\varphi) = 0$$

也即 $$2\cos\left(\omega x_0+\varphi+\frac{\omega l}{2}\right)\sin\frac{\omega l}{2} = 0$$

由于 x_0 的任意性,$\cos\left(\omega x_0+\varphi+\frac{\omega l}{2}\right)$不一定为零,故由 $\sin\frac{\omega l}{2}=0$ 得到其全部解 $l=\frac{2k\pi}{\omega}(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$.