

九年义务教育教师教育研究丛书

JIUNIAN YIWU JIAOYU
JIAOSHI JIAOYU YANJIU CONGSHU

数学教育新论

■ 主 编：杨高全 ■ 副主编：刘古胜 ■

中 南 大 学 出 版 社

数 学 教 育 新 论

JIUNIAN YIWU JIAOYU JIAOSHI JIAOYU YANJIU CONGSHU

S H U X U E J I A O Y U X I N L U N
S H U X U E J I A O Y U X I N L U N

ISBN 7-81061-775-3



9 787810 617758 >

ISBN 7-81061-775-3/O·042

定价:19.80 元

九年义务教育教师教育研究丛书

JIUNIAN YIWU JIAOYU

JIAOSHI JIAOYU YANJIU CONGSHU

数学教育新论

■ 主 编：杨高全 ■ 副主编：刘古胜 ■

中南大学出版社

1A053/08

数 学 教 育 新 论

主 编 杨高全

副主编 刘古胜

责任编辑 谢贵良

出版发行 中南大学出版社

社址:长沙市麓山南路 邮编:410083

发行科电话:0731-8876770 传真:0731-8829482

电子邮件:csucbs @ public.cs.hn.cn

经 销 湖南省新华书店

印 装 长沙交通学院印刷厂

开本 880×1230 1/32 印张 12 字数 343 千字

版次 2003 年 10 月第 1 版 2003 年 10 月第 1 次印刷

书号 ISBN 7-81061-775-3/O·042

定价 19.80 元

图书出现印装问题,请与经销商调换

目 录

第一篇 数学观

第一章 数学是什么

§1.1 数学是一门科学	3
§1.2 数学是一种工具	7
§1.3 数学是一门技术	12
§1.4 数学是一种文化	16

第二章 数学与人的发展

§2.1 数学对世界观的影响	22
§2.2 数学与思维发展的关系	29
§2.3 数学对一般素质的影响	33

第三章 现代数学与数学教育

§3.1 现代数学的新进展	42
§3.2 现代数学对数学教育的影响	46

第二篇 数学课程观

第四章 新的数学课程理念

§4.1 人人学有价值的数学	59
§4.2 人人都能获得必需的数学	60
§4.3 不同的人在教学上得到不同的发展	62

第五章 数学课程目标

§5.1 数学课程目标概述	64
§5.2 知识与技能	66
§5.3 数学思考	70
§5.4 解决问题	74

目 录

§5.5 情感与态度	78
------------------	----

第六章 数学课程内容

§6.1 数与代数	84
§6.2 空间与图形	97
§6.3 统计与概率	111
§6.4 实践与综合应用	118

第七章 数学课程资源的开发

§7.1 数学课程资源的含义	122
§7.2 数学课程资源开发的途径	123
§7.3 数学课程资源开发的基本要求	125

第八章 数学课程改革与发展

§8.1 我国数学课程改革与发展	128
§8.2 国际数学课程改革与发展	131

第三篇 数学学习观

第九章 学习观与数学学习

§9.1 不同的学习观	143
§9.2 数学学习的特点、类型和方式	154

第十章 数学学习的认知过程

§10.1 数学学习的一般过程	169
§10.2 数学学习过程的心理分析	177
§10.3 数学知识的学习过程	189
§10.4 数学技能的学习过程	198
§10.5 数学问题解决的过程	201

目 录

第四篇 数学教学观

第十一章 数学教学新观念

- §11.1 数学教学的本质 213
- §11.2 现代数学教学观 217

第十二章 数学教学的原则与方法

- §12.1 数学教学原则 229
- §12.2 数学教学方法 244

第十三章 数学教学设计

- §13.1 数学教学设计概述 257
- §13.2 数学概念教学设计 264
- §13.3 数学规则教学设计 271
- §13.4 数学问题解决教学设计 278

第十四章 数学课堂教学艺术

- §14.1 数学课堂教学艺术概说 288
- §14.2 数学教师语言的艺术 289
- §14.3 引入的艺术 295
- §14.4 提问的艺术 299
- §14.5 板书的艺术 303
- §14.6 德育渗透的艺术 307

第五篇 数学教学评价观

第十五章 数学教学评价概述

- §15.1 数学教学评价的概念 313

目 录

§15.2 数学教学评价的新理念	319
§15.3 数学教学评价的模式	322
第十六章 数学课堂教学评价	
§16.1 数学课堂教学评价的理念	325
§16.2 数学课堂教学评价的实施	327
第十七章 数学学习评价	
§17.1 数学学习评价的理念	336
§17.2 数学学习评价的形式	339
§17.3 数学学习评价结果的呈现	343

第六篇 数学教师观

第十八章 数学教师的角色和教学行为	
§18.1 数学教师的角色定位	351
§18.2 数学教师教学行为的变化	355
第十九章 数学教师的素质与专业化发展	
§19.1 数学教师的素质	361
§19.2 数学教师的专业化发展	367
后 记	376

第一篇 数学观

数学观,即一个人对于数学的看法。每个数学教师都应有自己的数学观,很难想象,一个连“什么是数学”的问题都没有弄清楚的数学教师,他是如何从事数学教学工作的。

对于数学教师的数学观,英国学者欧内斯特(P. Ernest)认为,大致可以区分为三种不同类型:

(1)动态的、易谬主义的数学观。这是指把数学看成人类的一种创造性活动,从而,数学主要地就是一种探索的活动,并一定包含有错误、尝试与改进的过程,更必然地处于不断的发展和变化之中。

(2)静态的、绝对主义的数学观。这是把数学看成无可怀疑的真理的集合,这些真理是很好地组织起来的,即构成了一个高度统一且十分严密的逻辑体系。

(3)工具主义的数学观。这是指把数学看成适用于各种不同场合的事实性结论、方法和技巧的汇集,由于这些事实、方法和技巧是为着不同的目的、彼此独立地发展起来的,因此,数学不能被看成一个高度统一的整体。

我国数学哲学家郑毓信教授认为,数学应被看成一个由理论、方法、问题和符号语言等多种成分所组成的复合体。

既然数学是一个复合体,那么从不同的侧面去认识就会产生不同的看法。从科学史及数学活动的角度看,数学是一门科学,是关于模式的科学;从数学的广泛应用角度看,数学是一种工具;从信息转换角度看,数学是一门技术;从数学这一开放系统角度看,数学是一种文化。本篇的第一章将对“数学是什么”的问题进行详细阐述。

数学以其学科特点和优良品质决定了它在教育人、陶冶人、启迪人等全面发展人的素质方面起着十分基本的作用。本篇的第二章将对“数学与人的发展”方面作深入探讨。

现代数学在研究领域、研究方式 and 应用范围等方面都有了空前的拓展,并对数学教育产生了深远的影响。本篇的第三章将对“现代数学与数学教育”进行论述。

第一章 数学是什么

§ 1.1 数学是一门科学

科学史表明,一些划时代的科学理论成就的出现,无一不借助于数学的力量。早在古代,希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras)学派就把数看作万物之本源。享有“近代自然科学之父”尊称的伽利略(Galilei)认为,展现在我们眼前的宇宙像一本用数学语言写成的天书,如不掌握数学的符号语言,就像在黑暗的迷宫里游荡,什么也认识不清。物理学家伦琴(Roentgen)因发现了X射线而成为1901年开始的诺贝尔(Nobel)物理奖的第一位获得者。当有人问这位卓越的实验物理学家,科学家需要什么修养时,他的回答是:第一是数学,第二是数学,第三是数学。对计算机的发展作出过重大贡献的冯·诺伊曼(von Neumann)认为“数学处于人类智能的中心领域”。他还指出:“数学方法渗透进支配着一切自然科学的理论分支……它已愈来愈成为衡量成就的主要标志”。

科学家们如此重视数学,他们述说的这些切身体验和坚定的信念,如果从哲学的层次来理解,其实就是说,任何事物都是量和质的统一体,都有自身的量的方面的规律,不掌握量的规律,就不可能对各种事物的质获得明确清晰的认识。而数学正是一门研究“量”的科学。

数学是人类活动的结果,具有明显的社会性。从科学史家的眼光来看,人类社会的每一次重大进步,都伴随着思想革命,而数学的变革是其中主要的标志之一。奴隶社会阶段,古希腊文明是集中代表,以逻辑演绎为特征的希腊数学灿烂辉煌,集大成的《几何原本》对人类的影响至今不衰。近代的资本主义文明,以牛顿(Newton)的万有引力学说为标志,由此产生的微积分勇敢地跨过了“无限”的门槛,可以说是人类思辨能力的高峰。法国大革命带来了伟大的法国数学学派。20世纪最伟大的科学革命——爱因斯坦(Einstein)的相对论,是在黎曼(Rie-

man)几何的基础上建立起来的。伟大的数学家冯·诺伊曼成为计算机科学的奠基人,它的影响已经超越了数学学科本身,也超越了电子计算机本身,成为人类进入信息时代的象征。

谁也不会怀疑数学是关于现实世界空间形式及其数量关系的科学,尤其在数学发展的初期,往往是以客观事物为直接的研究对象,揭示其间的数量关系和空间形式。但自20世纪中叶以后,数学本身(特别是数学应用)发生了根本变化,大多数数学家和数学教育工作者认识到关于数学的传统定义已不能很好用于今天的数学,逐渐接受了“数学是关于模式的科学”这一观念。

怀特海(Whitehead)在50多年前就指出:“数学的本质特征就是,在从模式化的个体作抽象的过程中对模式进行研究。”美国数学家斯蒂恩(Stevin)说:“数学是模式的科学。数学家们寻求存在数量、空间、科学、计算机乃至想象之中的模式。数学理论阐明了模式间的关系;函数和映射,算子和射把一类模式与另一类模式联系起来,从而产生了稳定的数学结构。数学应用即是利用这些模式对于适用的自然现象作出‘解释’和‘预言’。”

按照唯物论的反映论观点,数学模式在本体上具有两重性。就其内容而言,具有明确的客观意义,是思维对于客观实在的能动反映,任何数学模型都有它的现实原型;就其形式结构而言,数学并非客观世界中的真实存在,而只是创造性思维,亦即理性的创造物。从前者而论,数学是人们所发现的,从后者而论,数学是人们所发明的。

现代数学研究的目无非是要发现数学模式、构造(发明)数学模式以及扩充和发展数学模式。不仅工程师和应用数学家使用的各种数学模型是数学模式,而且关于各种数学问题的处理方法和解决方法以及各种数学理论结构体系,也都属数学模式之列。一个带有一般性的数学概念、数学公式、数学定理、计算方法,也应看作是或大或小的数学模式。

数学模式具有以下特点:

1. 模式研究的科学性体现了数学的精确性与严密性

模式是经过科学抽象得到的,与具体的经验事实有个重要的区别,

就是模式的真理性或科学性。经验常常会产生认识上的偏差,或者说凭经验难以准确把握的现象而通过抽象为一般的数学模式加以研究,就可能会获得满意的结果,科学史上的无数事例都证实了这一点。这表明了模式研究的科学性。人们常说数学的特点之一是高度的精确性与严密性,其实它正是通过模式研究的科学性表现的,模式是数学精确性得以实现的载体。例如,两条直线是否平行,以自己的经验就未必得到正确的结论,在近处会相交的直线,仅凭肉眼就判断它们不是平行线,但两条会在5公里以外相交的直线是不是平行线,就不是一眼可以看得清楚的,需要通过严格的数学证明。微积分诞生的背景表明,有了微积分这一模式才科学地解决了与此有关的种种问题。在核技术研究中,高温高压使核爆炸的巨大能量在微秒量级的时间内释放出来,要测量出核爆炸内部的细微过程是极困难的。但是,通过核反应过程的数学模型——一组非定常的非线性偏微分方程,在计算机上进行数值计算,却能了解到核反应过程的各个细节规律。马克思(Marx)曾经说过:“一种科学只有成功地运用数学时,才算达到真正完善的地步。”这说明马克思看中的正是数学模式的科学性。

2. 模式研究的自由性体现了数学的普适性

一方面,模式在一定意义上意味着与真实事物的分离;另一方面,模式的数学抽象是一种建构活动,从这两方面来说,也就为数学模式的自由创造提供了现实的可能性。而由此又体现了数学模式的普适性。由同一个原型出发,人们可以抽象出多种不同的数学模式。

例如,关于空间的数学概念不仅有多种,而且即使同一种空间中也有着多种不同的几何。“几何的发展在所有这些方向上继续着,各种新的‘空间’和它们的‘几何’:罗巴切夫斯基(Lobachevsky)空间,射影空间,各种不同维数的欧几里得(Euclid)空间和其他空间,例如,四维的黎曼空间、芬斯勒(Finsler)空间,以及各种拓扑空间等,都成为几何研究的对象。”这正如麦克莱恩(Maclane)所指出的:“关于数学的本质,我们的观点可以这样提出:数学研究现实世界和人类经验各方面的各种形式模型的构造。一方面,这意味着数学不是关于某些作为基础的柏拉图(Plato)现实的直接理论。另一方面,我们的观点强调数学涉及

大量各种各样的模型,同一个经验事实可以用多种方法在数学中被模型化。”

数学模式的建构过程中,想象是极其重要的。想象和构象使模式研究有了自由性(自由性并非任意性)。在射影平面内,想象两条平行线相交于无穷远处,构象出“无穷远点”这一射影几何基本概念。这样的例子在数学中屡见不鲜。列宁(Lenin)说过:“有人认为,只有诗人才需要幻想,这是没有理由的,这是愚蠢的偏见!甚至在数学上也是需要幻想的,甚至没有它就不可能发明微积分。”

3. 模式的形式化体现了数学的抽象性

数学研究的直接对象是模式,它是一种“思想材料”,不同于现实。例如,方程、有理数、无理数、实数、虚数等等,没有人也就没有这一切,但是,没有人固然没有牛顿力学、原子物理学,可万有引力现象、原子还照样在人脑之外客观存在着。自然科学的对象是大自然本身,数学研究的对象则是人对自然界概括化了的的一般模式。模式意味着形式化。

苏联数学家、数学教育家辛钦(Shinchin)说:“一切数学学科的决定性特点总是某种形式化的方法。……数学问题的解决,不能由它所反映的物体或现象的物质本性去解决,而只能由它的形式结构特点去解决。”数学的抽象总是摒弃一切现实内容成为纯粹的形式。“为要能够研究这些形式及其关系的纯粹形式,那么就应该完全把它们与其内容相分裂,把内容搁置不管,当作无所可否的东西。”数学的抽象性也就体现在模式的概括化和形式化。概括化反映在形式化之中,形式化使数学模式具有广泛的应用性或普适性。同一个拉普拉斯(Laplace)方程,既可用来表示热平衡态、溶质动态平衡、弹性膜的平衡位置,也可表示静态电磁场、真空中的引力势等等。列宁说,自然界运动规律表现出“微分方程惊人的相似性”。

4. 模式的层次性和多样性体现了数学的统一性

对数学模式的研究又必然会形成一系列新的数学模式,所以模式具有鲜明的层次性。例如,方程是一种模式,作为对一元二次方程这一类模式的研究,其求解的概括化与形式化又产生出求根公式这一新模式,前后两者有着不同的层次。再如,自然数 $\rightarrow$ 整数 $\rightarrow$ 有理数 $\rightarrow$ 实数 $\rightarrow$

复数,群 $\rightarrow$ 环 $\rightarrow$ 域,等等。

前述模式研究的自由性也构成了模式的多样性。例如进位制,历史上曾出现过五进制、十进制、十六进制、二十进制、六十进制等。巴比伦人和玛雅人有位值制概念,却都不是十进制;古埃及和古希腊是十进制,却都没有位值制,只有中国是最早采用十进位值制的国家。这种十进位值制计数系统后来被世界各国通用。英国著名科学史家李约瑟(Joseth)曾说:“如果没有这种十进位值制,就几乎不可能出现我们现在这个统一化的世界了。”这是对十进位值制统一性的高度评价。

§ 1.2 数学是一种工具

数学的工具作用表现在:科学的语言、思维的工具、一种思想方法。

一、数学是科学的语言

在数学中,各种量与量的关系、量的变化以及量与量之间这种(些)量的变化与那种(些)量的变化之间的关系,都是用数学所特有的符号语言表示的。德国数学家和哲学家莱布尼兹(Leibniz)曾指出,数学之所以如此有成效,之所以发展极为迅速,就是因为数学有特制的符号语言。

在科学研究中,运用数学语言有许多好处。首先,数学语言可以摆脱自然用语的多义性,用符号来表示科学要领具有单义性、确定性,在推理过程中容易保持首尾一贯,不致于因发生歧义而造成逻辑混乱。其次,由于符号语言简洁明确,便于人们进行量的比较,从量的方面对事物的某种数量级作出直接的判断,对所研究问题能作出比较清晰的数量分析。

正因为此,有不少科学家都曾明确地强调了数学的语言功能。例如,著名的物理学家玻尔(Bohr)就曾指出:“数学不应该被看成是以经验的积累为基础的一种特殊的知识分支,而应该被看成是普通语言的一种精确化,这种精确化给普通语言补充了适当的工具来表示一些关系,对这些关系来说普通字句是不精确的或过于纠缠的。严格说来,量

子力学和量子电动力学的数学形式系统,只不过给推导关于观测的预期结果提供了计算法则。”C·迪尔曼说得对:“数学也是一种语言,而且就其结构和内容而言,它是现实中优于任何普通语言的最完善的语言;事实上,由于它为每一个人所理解,数学可称为语言的语言。自然界仿佛用它说话,世界的创造者用它说话,世界的保持者仍在用它说话。”T·丹齐克(Dantzig)在《数,科学的语言》一书中对此作了更为精辟的论述。——正因为如此,要想学好数学,必须在“数学语言”上下一番功夫。

一般地说,人们对于各种自然规律的认识不是一种直接的、简单的反映,而是包括了一个在思想中“重新构造”相应的研究对象的过程。特殊地,就现代的理论研究而言,这种相对独立的“研究对象”的构造则又往往是借助于数学语言得以完成的,显然,这也就更为清楚地表明了数学的语言性质。

数学作为一种科学语言,还表现在它能以其特有的数学语言(概念、公式、法则、定理、方程、模型、理论等)对科学真理进行精确和简洁的表述。几何和不变量理论为爱因斯坦发现相对论提供了绝妙的描述工具。而边界值数学理论使20世纪二三十年代的远距离原子示波器的制成变为现实。矩阵理论为20世纪20年代海森堡(Heisenberg)和狄拉克(Dirac)引起的物理学革命奠定了基础。

随着社会的数学化程度日益提高,数学语言已成为人类社会中和交流和贮存信息的重要手段。如果说,从前在人们的社会生活中,如在商业交往中,运用初等数学就够了,而高等数学一般被认为是科学研究人员所使用的一种高深的科学语言,那么在今天的社会生活中,只懂得初等数学就会感到远远不够用了。事实上,高等数学(如微积分、线性代数等)的一些概念、语言正在越来越多地渗透到现代社会生活的各个方面的各种信息系统中,而现代数学的一些新的概念(如算子、泛函、拓扑、张量、流形等)则开始大量涌现在科学技术文献中,日渐发展成为现代的科学语言。

数学作为人类所创造的一种高级语言类型,亦是数学思想文化最典型的表征之一。作为数学思想本质的一种理解与思维表现形式,数

学语言还以其特有的精确性、简洁性、逻辑性和抽象性为社会科学语言注入了活力并逐步成为社会科学语言中重要的组成部分。各种数学概念、术语、公式、算法、程序正被社会科学工作者得心应手地使用着。现代数学的语言,从控制论到几何学,从微分几何到统计学,已经广泛渗透到了现代社会各个信息系统中去。数学语言正展示出其世界文化符号的风采。

二、数学是思维的工具

数学是一种思维工具,这是由数学思想的本质特征所决定的。数学思维有逻辑严谨性、高度的抽象性和概括性、丰富的直觉与想象等特征。这些特征使得数学思维在寻求事物本质属性,探索事物间联系,把握物质结构,对事物发展趋势作出预测等方面显示出惊人的优势。如被称为“智力体操”的欧氏几何,就曾对很多伟大科学家的早期思维方式的形成产生过巨大的影响。爱因斯坦对科学的热爱就始于他少年时代接触到欧氏几何之后。少年爱因斯坦对几何学中用很少的公理通过演绎推理得到大量的定理惊叹不已,使他坚信世界是以一种整体的简单性存在的。这导致了他毕生的物理学信念与执着的追求。

数学是一种思维工具,还表现为数学是任何人分析问题和解决问题的思想工具。这是因为:首先,数学具有运用抽象思维去把握实在的能力。数学概念是以极度抽象的形式出现的。在现代数学中,集合、结构等概念,作为数学的研究对象,它们本身确是一种思想的创造物。与此同时,数学的研究方法也是抽象的,这就是说数学命题的真理性不能建立在经验之上,而必须依赖于演绎证明。数学家像是生活在一个抽象的数学王国中,然而他们在数学王国的种种发现,即数学结构内部及各种结构之间的规律性的东西,最终还是现实的摹写。而数学应用于实际问题的研究,其关键还在于能建立一个较好的数学模型。建立数学模型的过程,是一个科学抽象的过程,即善于把问题中的次要因素、次要关系、次要过程先撇在一边,抽出主要因素、主要关系、主要过程,经过一个合理的简化步骤,找出所要研究问题与某种数学结构的对应关系,使这个实际问题转化为数学问题。在一个较好的数学模型上展