

关于算术和几何的原理

——供小学教师使用

[美] 卡尔 B·艾伦多弗 著

孙 伟 刘意竹 张月仙 译

文化教育出版社

关于算术和几何的原理

——供小学教师使用

〔美〕 卡尔 B. 艾伦多弗 著

孙伟 刘意竹 张月仙 译

文化教育出版社

内 容 提 要

本书译自美国华盛顿大学数学教授 Carl B. Allendoerfer 写的《Principles of Arithmetic and Geometry for Elementary School Teachers》，这是一本在美国大学中培训未来的小学教师的教材。书中系统地介绍了与小学数学教学内容有关的基础知识，并提供了理论依据，内容包括：有关逻辑和集合的基本知识，数和计数，非负整数四则运算的基本原理和算法，数系的扩充和有理数的四则运算，以及与小学教学直观几何有关的知识，等等。书中有不少独特的教学处理手法值得我们研究和借鉴。

本书从最基本的知识开始，循序渐进，一般具有初中以上文化程度的人都不难看懂。可供广大小学教师和从事小学数学教育研究的同志参考，也可作为中等师范学生的阅读自学教材。

关于算术和几何的原理

——供小学教师使用

[美] 卡尔·B. 艾伦多弗 著

孙伟 刘意竹 张月仙 译

*

文化教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张 17.5 字数 361,400

1986 年 5 月第 1 版 1987 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—4,100

ISBN7-5018-0000-6/G·1

7057·091 定价 2.95 元

译者的话

《关于算术和几何的原理》一书原是为在美国大学中学习、准备将来当小学教师的学生提供的教材。书中系统地介绍了与小学数学教学内容有关的基础知识，并提供了理论依据，引用了大量例题，介绍了知识的由来和发展，使读者耳目一新，不仅知道怎样解答这些数学问题，而且能够深刻理解为什么可以这样做。尤其值得提出的是，这本书在讲解一些数学原理时运用了一些独特的处理手法，这对于我们来说也许是新鲜的。鉴于我国目前介绍国外小学数学教育的书籍还不多，很多从事小学教学研究的同志和教师们都希望多了解一些国外的情况，我们愿意把这本书翻译出来，奉献给我国的教育工作者！

这本书采用了循序渐进的方式，引导读者去探索知识，一般具有初中以上文化水平的人都不难看懂。由于我们着眼于借鉴书中对我们有所裨益的教学内容，为节省篇幅，翻译中略去了原书各章中每一节后的练习题及参考文献，只保留了每一章的准备测验、阶段测验以及各篇的总结测验，供读者作练习用。为了保持原书系统的完整，我们把原来练习中的一些定理和重要内容附在了有关的章节后面。

本书由孙伟、刘意竹、张月仙合译。其中，序言、第一、二、五篇由孙伟译出，第三篇以及第四篇中的第十八章到第二十一章和第二十五章到第二十七章由刘意竹译出。第四篇中的

第二十二章到第二十四章由张月仙译出。全书由曾宪源同志校阅，另外，我们在翻译过程中得到曹飞羽同志的多次指导，曾宪源同志在校阅中也提出了很多宝贵意见，为本书的译稿润色不浅，特此表示感谢。

由于译者的水平有限，难免有失误之处，敬请广大读者批评指正。

1986年5月

序 言

本书的读者

本书是为准备当小学教师的学生编写的数学课本。它假定每位读者在中学已经学过为期各为一年的代数和几何；但如果能用足够的时间来弥补准备上的缺陷，那么，原来准备不够的学生也能够用这本书。然而，必要的前提是学生对用字母来表示不确定的数感到习惯。

本书的第 I 篇到第 IV 篇介绍数系结构的一种处理方法。因而它们包括 CUPM 在它的“水平 I”课程中提出的关于数系的内容。虽然本书的编写与 CUPM 提出的大纲无关，但是这本书的组织结构与 CUPM 制定的 1968 年版的教学大纲极为一致。

第 V 篇涉及非形式几何，它是小学教师的必修课题。有关几何的第五章包括了安大略学校课程研究所 K-13 几何委员会提出的关于小学教育的课题。这几章不同于 CUPM 关于几何的建议之处，在于它所谈论的内容更不严密，更非形式化，而且还包括了几何变换。

本书讲授的时间

这本书打算讲一年，每周安排三个小时。实验教学证明讲授数系不需要用 CUPM 所建议的一整年的时间，在这样的课程中有足够的时间来讲授包括几何知识的内容。事实上，我们在华盛顿大学对有充分准备的学生只用两个学期^①就几

① 指每学年分为四个学期中的两个学期。——译者注

乎讲完全书。

关于课程进度和每一章所需要的时间的详细建议包含在单独出版的教师手册中。

本书的一般方法

由于学习这一课程的大多数学生理应在算术的机械运算方面有足够的能力,因此我们只是复习这些运算,而没有进行大量的训练。本书的主要目的是介绍这些运算后面的思想,以便学生既理解怎样做,也理解为什么。

所有的概念在正式论述之前,都先用直观形式进行介绍。这一方法是为了同在小学讲授这一内容应采用的方法一致,虽然这本书是在比小学课本更高的水平上编写的。

本书的体例

本书的每一节都以传统的教科书内容开始,并附有大量的用作说明的例子。正文后面是一系列按不同难度安排好的练习。每一章以一个准备测验为先导,用来复习这一章所需要的概念和技能。每一章的末尾有一个阶段测验,复习这一章的主要概念,使学生能用来估量一下他们对这些概念的理解。每一篇后有一个总结测验,它将帮助学生复习,以便参加在本书每篇后所正常安排的期中考试。

可以采用的补充影片

这本书是作为用多种方式来介绍“水平 I”课程(内容)的一个组成部分。除本书外,这套设计还包括 13 部与正文紧密配合的影片。这些影片部分由国家科学基金会提供资金,由美国数学协会制作,另一部分由私人企业制作。所有这些影片由现代学习用品公司(Modern Learning Aid)经销,地址是

P. O. Box 302, Rochester, N. Y. 14603. 与各章相关的影片标题如下:

影片标题	章
集合是什么?(共两部)	3. 集合
一一对应	4. 一一对应
计数	5. 非负整数和计数
集合: 并集和交集	6. 集合的并、交、补
有序对和笛卡儿乘积	7. 笛卡儿乘积
二元运算和交换性质	8. 二元运算
结合性质	8. 二元运算
加法和减法	9. 加法
	10. 不等(式)和减法
乘法和除法	11. 乘法和除法
分配性质	12. 分配律
几何概念	28. 几何概念
面积和 π	29. 度量
刚体运动	30. 平面上的几何变换

影片为彩色, 生动形象并具有音响效果. 影片长度为六到十四分钟不等, 但多数都在八到十分钟左右.

配合每一章的影片可在开始讲这一章时放映. 影片的目的在于诱导出相应各章中的概念, 并消除学生在这一课程的学习中常常要遇到的种种忧虑. 影片没有全面反映各章所涉及的内容, 所以在影片放映后, 教师还有许多事情要做. 但应该强调的是这本书本身是完整的, 它不依赖于影片. 影片是很有帮助的, 但不是必不可少的.

本书是怎样编写的

这本书来源于美国数学协会教育手段委员会“水平 I”和程序化学习小组的成果。在全国科学基金会的支持下，这些小组着手为“水平 I”课程准备多种方式的介绍材料。1964 年夏，试验影片制作出来，并写出了初步的程序化课本，标题为“关于数系结构的程序化教程”。后来，在美国数学协会的赞助下，这些材料修订后以“非负整数”和“有理数教程”为标题作为预备性的出版物出现，并由美国数学协会制作了上面所列影片中的七部。

这些最初的版本要经过课堂试验和修订后才能发行供普遍使用。这个试验（在下一段介绍）于 1966 年—1969 年期间在华盛顿大学进行，现在的教科书，除了几何内容完全是新的外，是这些较早著作的经过充实的修订本。

承蒙国家科学基金会和美国数学协会的好意，作者得到许可发行目前形式的修订本。需要明确的是对本书现在的形式主要由作者个人负责，国家科学基金会、美国数学协会和教育手段委员会对本书不承担任何责任。

从一开始就有许多人参加了这一工作，这里不可能提及所有人的名字（在一定程度上是因为作者没有一份完整的名单）。然而，下面这些人由于他们在这项工作后期中的成绩值得特别提出：William B. Allendoerfer, Boyd L. Earl, Brewster H. Gere, Frank T. Kocher, Jr., Charles W. Seekins 和 William B. Woolf.

本书是怎样试验的

1966 年和 1967 年期间，最初的版本在华盛顿大学由没有

参与过该方案的教师讲授。他们汇报了用这一教材试教取得的值得重视的成就，因而值得花时间作出更详细的评价。评价设计由华盛顿大学心理学教授 Arthur A. Lumsdaine 与华盛顿大学心理学副教授 Robert R. Pagano 合作准备。心理学专业研究生 Lee Wood 夫人提供了援助，并从福特基金会给华盛顿大学的拨款中获得资金。

最详细的试验是关于“非负整数”的第 2 章到第 17 章。把这些章中每一节的教学目的连同打算用来衡量这些目的是否达到的问题一起写出来。这些问题后来在 1968 年秋进行了课堂测验。看来第 2 章和第 5 章最需要修改，所以修改了这两章，并且在 1969 年冬讲授该课程时，对所有各章都再次进行了试验。

“有理数教程”没有进行最初的试验便作了修改。在 1969 年春，对修改后的版本以及新增加的几何内容，按同样的方法有了试验。

试验过程的全部记录及教学目的、测验成绩和评注都可以从作者编写的小册子“评价和修改试验教材的实验”中找到。教学目的和测验问题包括在教师手册中，该书由麦克米伦公司与本书一起出版。

学生能够学习这本书吗？

由于本书比起其他有类似目的的书更详细，数学上更完整，那么提出“学生能够掌握它吗？”这个问题就是合理的。回答是肯定的，“能”。讲授本书最初几次修订本的教师的评论是热烈的。学过本书的相当多的学生还特地讲了一些赞美的话。在相应的课程中本书是很成功的。

怀疑论者可能认为所有这些赞扬只是来自那些要对资历较深的同事讨好的人,为使他们信服,这里有一些不容怀疑的证据。在初版的试验计划中,学生得到的总的平均成绩是:

第一篇	84.7 %
第二篇	83.5
第三篇	83.2
第四篇	88.4
第五篇	73.2

这些都是原始数据,值得认真地和详细地分析。但它们又是可靠的根据,说明本书做了工作。几何成绩较低可能有两方面的原因:(1)教几何时用的是第一稿,当时其他几部分至少是第三稿了。(2)由于本课程前几部分进度太慢,教几何时只得匆匆赶进度。如果允许有充分的时间,那么经过修订后收编在现在这一版的改编本肯定会和本书其他部分一样成功。

最后,作者希望向始终参加本项工作的所有数学家,向国家科学基金会、美国数学协会、福特基金会、华盛顿大学以及 Orlliss Wildemuth 再次表示感谢。没有他们的帮助,本书是不能写成的。

Carl B. Allendoerfer

写 给 学 生

本书的内容

本书的目的是为大家在小学讲授算术和非形式几何做准备。虽然你们可能知道怎样做算术题，但是如果将来要向学生解释的话，就需要知道为什么通常的做法是正确的。本书的目的就是复习怎样做并解释为什么。

数学中的一切讲授都应该在直观水平上开始。当你抓住概念并把它们与你周围的世界联系起来时，就为更正规的讲述做好了准备。在本书中我们遵循了这一程序，大家在自己讲课时也同样应该这样做。然而我们应该强调，本书是为成年大学生写的，而你们自己的教学一定要在一个简单得多的水平上进行。

在第一篇中我们介绍使算术的发展有所遵循而需要的逻辑、集合和非负整数的基本概念。在第二篇中，我们在集合性质的基础上讨论非负整数通常的算术运算。这两部分为通常的算术奠定了理论基础。

第三篇致力于做算术题的一般程序。根据第一篇和第二篇中提出的理论来证明这些程序是正确的。大家将注意到对每一种算术运算我们都介绍了几种算法；做算术题不只是一种方法。许多世纪以来算法一直在发生变化，而且至今在不同的国家，甚至在不同的学校仍然有所不同。

第四篇把非负整数扩充到其他数系,例如整数和有理数.大家会注意到这里的研究方法是完全不同的.我们并未使它们立足于集合理论,而是要考虑使这些新型数系成为具有某些合乎需要的性质,由非负整数扩充而成的数系.

在第五篇中,我们向大家介绍应在小学讲授的非形式几何,作为在中学讲授演绎几何的准备.

怎样学习本书

如果有关于某一章的电影(第3章到第12章和第28章到第30章),应该在开始学习这一章之前先看电影.其次做准备测验,以确信你理解所需要的前一章中的概念.

然后,大家就该开始学习该章的正文.可以先快速地看一遍,然后再回过头来看你不熟悉的部分.证明是重要的,应该详细地研究.

学完一部分教材后,就要准备做后面的循序渐进的练习,要想更有效地做练习,就应遵循下面的指导:

1. 准备好铅笔和纸并用它们写下你的解答.
2. 将标准答案盖住,直到回答完所有的问题.
3. 把你的答案与已给的答案做一下比较.如果你的答案就是给出的答案或与之等价,就可以继续往下检查.如果你的答案不正确,就再看一遍直到发现错误所在,然后写出正确的答案.在一些答案里,括号里给出可供选择的答案或说明,这些并不要求包括在你们的答案里.

当你们学完每一章后,复习其中所包含的基本概念和技巧.然后做相应的阶段测验来检查你们的理解力.先完成阶

段测验，再根据下面给出的答案进行核对。如果有的问题做得不对，请复习本章，搞清楚为什么你错了，然后写出正确的答案。

在每一篇的最后都有一个总结测验，大家应按照教师的指导来使用。这些总结测验和每一章的阶段测验对大家进行期中和期末考试复习是有帮助的。

目 录

译者的话	1
序言	1
写给学生	7

第一篇 逻辑、集合与非负整数

第一章 引言	1
--------	---

1.1 本课程的意图 1.2 数 1.3 其他类型的数 1.4 数和数字

第二章 逻辑	8
--------	---

2.1 引言 2.2 命题和开语句 2.3 开语句转换为命题 2.4 复合开语句 2.5 开语句的否定 2.6 开语句的逻辑等价 2.7 条件语句 2.8 导出条件语句

第三章 集合	37
--------	----

3.1 引言 3.2 集合 3.3 用成员描述的集合 3.4 集合的成员或元素 3.5 用性质描述的集合 3.6 集合的相等 3.7 子集 3.8 集合符号概要

第四章 一一对应	59
----------	----

4.1 引言 4.2 一一对应 4.3 其他的对应 4.4 等价集合 4.5 $A \sim B$ 的性质 4.6 有限集合和无限集合 4.7 不等价的集合 4.8 等价关系

第五章 非负整数和计数	76
-------------	----

5.1 引言 5.2 标准集合 5.3 基数 5.4 求基数的方法 5.5 原始部落计数的种种困难 5.6 非负整数 5.7 关于非负整数的冯·诺伊曼方法 5.8 皮亚诺(Peano)公理系统(选学)

第六章 集合的并、交、补	93
--------------	----

6.1 引言 6.2 定义和说明 6.3 韦恩(Venn)图 6.4 真值表 6.5 多重交集和多重并集 6.6 交和并的交换性质 6.7 绝对

补(集) 6.8 相对补(集)

第七章 笛卡儿乘积.....112

7.1 引言 7.2 有序对 7.3 笛卡儿乘积 7.4 笛卡儿乘积的特殊情况 7.5 笛卡儿乘积的性质 7.6 多重笛卡儿乘积

第一篇的总结测验.....128

第二篇 非负整数算术的基本原理

第八章 二元运算.....133

8.1 引言 8.2 集合上的二元运算 8.3 可交换的二元运算 8.4 可结合的二元运算 8.5 推广的交换性质 8.6 关于“封闭性”的说明

第九章 加法.....150

9.1 引言 9.2 加法的定义 9.3 关于加法定义的说明 9.4 加法的交换性质和结合性质 9.5 注意 9.6 相等的性质 9.7 一个早先的公式的扩充 9.8 证明加法是唯一确定的(选学)

第十章 不等(式)和减法.....171

10.1 引言 10.2 非负整数间的不等 10.3 减法的定义 10.4 减法的性质 10.5 实数直线上的加法和减法 10.6 关于减法的定理

第十一章 乘法和除法.....185

11.1 乘法 11.2 乘法的定义 11.3 乘法的性质 11.4 特殊的乘积 11.5 除法 11.6 除法的性质 11.7 用零除带来的困难 11.8 关于除法的定理 11.9 有余数除法 11.10 乘法是唯一确定的(选学)

第十二章 分配律.....206

12.1 引言 12.2 笛卡儿乘积对集合的并的分配性质 12.3 乘法对加法的分配性质 12.4 例证和推广 12.5 “乘法是重复的加法” 12.6 其他的分配性质 12.7 含有除法的分配性质 12.8 算术表示式的计算 12.9 并和交的分配性质(选学)

第二篇的总结测验	225
----------	-----

第三篇 关于非负整数算术的算法

第十三章 记数法	228
----------	-----

13.1 最初的概念	13.2 印度-阿拉伯数字	13.3 其他底的数字
13.4 底的转换		

第十四章 加法的算法	241
------------	-----

14.1 引言	14.2 基本加法表	14.3 多个一位数的加法	14.4 几个多位数的和	14.5 算法
---------	------------	---------------	--------------	---------

第十五章 减法的算法	256
------------	-----

15.1 引言	15.2 减法的基本方法	15.3 “借位法”	15.4 另一种“借位”	15.5 求补的方法	15.6 加的方法
---------	--------------	------------	--------------	------------	-----------

第十六章 乘法的算法	268
------------	-----

16.1 引言	16.2 “俄罗斯农民”算法	16.3 乘数是一位数的乘法	16.4 一般情况	16.5 其他算法(选学)
---------	----------------	----------------	-----------	---------------

第十七章 除法的算法	281
------------	-----

17.1 引言	17.2 除法的策略	17.3 除数是一位数的除法(规则的方法)	17.4 除数是多位数的除法(规则的方法)	17.5 除法的其他方法	17.6 舍入法	17.7 整除性的检验
---------	------------	-----------------------	-----------------------	--------------	----------	-------------

第三篇的总结测验	301
----------	-----

第四篇 非负整数系的扩充

第十八章 模的算术	304
-----------	-----

18.1 引言	18.2 偶数和奇数	18.3 同余	18.4 关于同余的定理	18.5 模的算术	18.6 时钟算术	18.7 弃九法
---------	------------	---------	--------------	-----------	-----------	----------

第十九章 整数的加法和减法	323
---------------	-----

19.1 引言	19.2 对有符号数的需要	19.3 整数的加法(直观处理)	19.4 整数的加法(形式处理)	19.5 整数的减法
---------	---------------	------------------	------------------	------------

第二十章 整数的乘法和除法	343
---------------	-----