立体几何

解题方法与技巧12讲

左文魁　冷德良　编

中南工业大学出版社

立体几何解题方法与技巧12讲

左文魁　令德良　编

责任编辑　田莱琤

*

中南工业大学出版社出版发行

娄底地区印刷厂印装

湖南省新华书店经销

*

开本　787×1092/32印张．13字数．303千

1989年2月第1版1989年2月第1次印刷

印数：00001－13500

*

ISBN7-81020-227-8/O·035

定价：3.50元

前　　言

为了帮助广大青年学习立体几何，我们根据自己多年讲授这门课程的经验，按照立体几何的题型和解题思路进行分类，将立体几何归纳成12个专题，以讲座形式奉献给广大读者。

全书着重讲述各类题型的解法、技巧。选择示例典型，解答详尽，便于自学，对培养广大青年的空间想象力，正确理解数形相结合的观点，都有裨益。

本书的第1、3、4、6-10、12各讲由左文魁同志编写，第2、5、11讲为冷德良同志编写。另外，金吉临同志对本书的编写提供了宝贵的意见，特此致谢。

本书是广大青年学习立体几何的辅导资料，也是广大数学教师的教学参考书。

书中错误和欠妥之处，望读者不吝指教。

编　者

一九八九年二月

目　录

第1讲　共面　共线　共点

第2讲　平行与垂直问题

第3讲　各种空间角度的求法

第4讲　各种空间距离的计算

第5讲　射影与对称

第6讲　折叠问题

第7讲　表面积和体积

第8讲　截面与截线

第9讲　几何体的结合

第10讲　短程线

第11讲 立体几何中的不等式

第12讲 立体几何与平面几何间的类比和转化

第一讲　共面　共线　共点

点、线、面是空间最基本的元素。

3个以上的点是否共线？4个以上的点是否共面或共圆？5个以上的点是否共球面？

两条直线是否有交点，是否在一个平面内？3条以上的直线是否交于同一点？是否在同一个平面内？

3个以上的平面是否相交于同一直线？是否过同一点？

空间几条直线或几个平面分空间为多少部分？

这些都是立体几何的最基本问题。解决这类问题时，所能使用的定理极少，而要得出结论或推导证明却十分困难，是初学者的难点。本讲以例题为中心予以讲述。

§1-1　共面问题

研究几个点或几条直线是否在同一个面内（一般指平面，有时也指球面或其他曲面）的问题，称共面问题。

例1　证明：两两相交而不过同一点的四直线a、b、c、d必在同一平面内。

分析　任取四直线中的两条，可以确定唯一的一个平面，故只须证其他两直线在此确定的平面内，这又只要证每直线上有两点在此平面内即可。

证明　如图1-1，设$a\cap b=P$，过a、b的平面为α。c、d

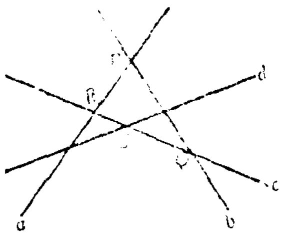

图1-1

中至少有一条不过P，否则四直线将过同一点。不妨设$P\overline{\in}c$，令$c\cap a=R$，$c\cap b=Q$，R，Q各不与P重合。

$\because$ $R\in a\subset\alpha$，$Q\in b\subset\alpha$

知R、$Q\in\alpha$，

而 $R\in c$，$Q\in c$，

$\therefore$ $c\subset\alpha$

若$P\overline{\in}d$，同上可证$d\subset\alpha$。这样，a、b、c、d都在α内。

若$P\in d$，可令$c\cap d=S$，S必不重合于P。由P、$S\in d$，$P\in\alpha$，$S\in c\subset\alpha$，知$d\subset\alpha$，也得a、b、c、d都在α内。

故 a、b、c、d总在同一平面内。

评注 ① 本题还可以用同一法证：设c与a、b分别交于R、Q，d与a、b分别交于S、T，过a、b作平面α，过c、d作平面β，易证R、S、T、Q既在α上，也在β上。知α、β重合而得结论。

② 本题可以推广到更一般的结论："若n（$n\in N$，$n>2$）条直线两两相交，但不过同一点，则这n条直线在同一平面内。请读者自证。

例2 互相垂直的两条异面直线a、b，它们之间的距离为d。定长为l（$l>d$）的动线段的两端P、Q分别在a、b上移动，PQ的中点为M，试证：

1）M总在一个确定的平面上；

2）M总在一条确定的平面曲线上。

分析 PQ是动线段，它的中点的位置有无穷多个，要证

这无穷多个点共面，有两种思考途径：一是，先取出3个位置，它们确定一个平面，再任取第4个位置，证明它正好落在所确定的平面内；二是，根据题意先找出一个特殊的平面 γ，再证 PQ 在任意位置时，其中点 M 都落在 γ 上。后一种方法显然更简便些。

证明 1）设 a、b 的公垂线为线段 AB，过 AB 的中点 O，作平面 α，使 $AB\perp\alpha$，此 α 当然是唯一确定的。

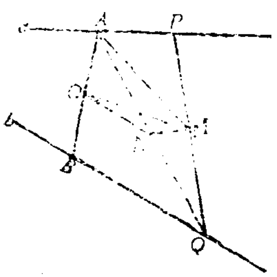

图1-2

如图1-2，任作线段 PQ，使使 $PQ\cap a=P$，$PQ\cap b=Q$。令 PQ 的中点为 M，连结 AQ，AM。AQ 的中点设为 N，连结 OM、ON、MN，则

$ON\parallel BQ$，　$MN\parallel AP$

而　$AB\perp a$　$AB\perp b$　知

$AB\perp ON$，$AB\perp MN$。

$\therefore$　$AB\perp\Delta OMN$ 所在的平面

ΔOMN 所在的平面与平面 α 都 $\perp AB$，且都过 AB 的中点 O，因而两平面重合。故 $M\in\alpha$。

即，对于端点在 a、b 上的任意线段 PQ，其中点永远在 a、b 的公垂线的中垂面上。

2）已知　$a\perp b$，即 $PA\perp BQ$。

又　$AP\perp AB$，得 $PA\perp$ 平面 ABQ

$\therefore$　$PA\perp AQ$，ΔPAQ 是 $Rt\Delta$。M 为其斜边 PQ 的中点有

$$AM=\frac{1}{2}PQ=\frac{1}{2}l$$

由1）知，无论 PQ 位置如何，总有 M、$O\in\alpha$，而 $AO\perp$

α，知$AO \perp OM$，即OM为$Rt\Delta AOM$的一直角边。故

$$OM=\sqrt{AM^2-AO^2}=\frac{1}{2}\sqrt{l^2-d^2}$$是定量。

O是定点，故M在α平面内的以O为圆心、$\frac{1}{2}\sqrt{l^2-d^2}$为半径的圆周上。

例 3　一个空间四边形的四边外切于一个球，证明四个切点在同一平面内。

分析　将4个切点联成两条直线，如图1-3中的EH、FG，只需证明这两直线平行或者相交。EH是否与FG相交尚不知道，但EH与对角线BD在同一平面内，它们或者平行或者相交。不妨设他们交于K_1（若平行，可看作相交于无穷远点）。同样，设FG与BD相交于K_2。如果K_1、K_2不重合，那么EH与FG若有交点，也必异于K_1K_2而在K_3处。这时根据例1，BD、EH、FG三直线共面，这与$ABCD$为空间四边形是矛盾的。就是说，要么EH与FG不相交，要么K_1K_2非重合不可。因此可以通过量的计算，确定EH与BD、FG与BD的交点重合，达到证明的目的。

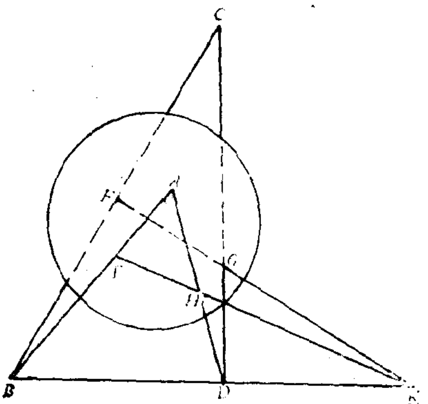

图1-3

证明　设空间四边形$ABCD$的各边切球于E、F、G、H。联EH、FG，过球外一点向球所作的切线长相等，故可令

$AE=AH=a$，$BE=BF=b$，$CF=CG=c$，$DG=DH=d$，$BD=e$。

若$b=d$，则$AE=AH$，$BE=DH$，得$EH\parallel BD$。

同理　$FG\parallel BD$。

从而　$EH\parallel FG$，E、F、G、H共面。

若$b\neq d$，不妨假定$b>d$，EH、BD共面但不平行，设它们交于BD延长线上的K_1处。同样，设FG、BD交于K_2。分别考察ΔABD所在平面及ΔCBD所在平面内的各线段间的数量关系。

如图1-4（a），在EB上截取$EL=HD=d$，$LB=b-d$

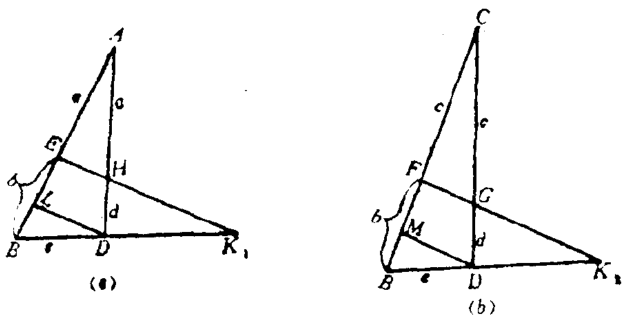

图1-4

易知$LD\parallel EK_1$，故 $BK_1=\dfrac{BD\cdot EB}{LB}=\dfrac{be}{b-d}$ 在（b）图中，用完全相同的方法可得

$$BK_2=\frac{be}{b-d}$$

因而$BK_1=BK_2$，即K_1与K_2重合，EH、FG都过BD上的同一点。即E、F、G、H四点共面。

评注　解本题的关键在于完成3个转化：点共面与线共面

的转化；形的关系与量的关系的转化；空间图形与平面图形之间的转化。

上面三例，列举了点与线、线与线、点与点共面的问题。其中“线与线共面”是证明共面问题的重点。大家知道，不在一直线上的三点确定一个平面，一条直线及线外一点确定一个平面，这两种类型都是“单一”的，而两条直线位置却有相交、平行、异面三种情况。证明“线与线”是否共面，必须先确定两条直线属于三种情况中的哪一种，再分辨两两直线所确定的平面是否同一。所以，“线与线共面”的涉及面较广，知识综合性强，倍受命题者的重视。多点与多线共面的问题，通常先由“线线共面”，再探索是否过诸点。多个点共面一般可以两两联结化为“线线问题”。

共面的否定就是异面，由于三点确定一个平面，证明多于三个的点不共面就无实用价值。只有证明两条直线异面的问题才经常出现。要证明两直线为异面直线，通常使用反证法。

例 4 互相异面的直，a、b、c 不平行同一平面，试证，它们构成的三条公垂线中线至少有两条是异面直线。

分析 题目的结论有三层意思：（1）三条公垂线中，可能任意两条都是异面直线；（2）三条公垂线中，可以有两条是平行或相交的，但第三条决不会在前两条所确定的平面内；（3）三条公垂线不可能在同一平面内，即不可能互相平行或两两相交或两平行线同第三直线相交。这里只需证明第（2）层意思，就既包含有(1)中的“可能”，也包括了(3)中的不可能。

就是说，可以先假设有两公垂线共面，设法否定第三公垂线在前两条所决定的平面内。

证明 设a、b的公垂线为AB，a、c的公垂线为ED，b、c的公垂线为PQ。若AB、ED在同一平面 α内，由于$AB\perp a$，

$ED \perp \alpha$，知$AB \parallel ED$或AB与ED重合。

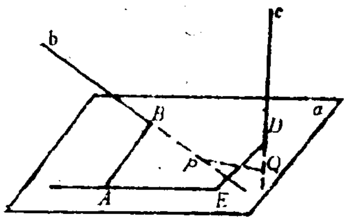

图1-5

若$AB \parallel ED$，如图1-5。如果$PQ \subset \alpha$，则P、Q两点在α内。而PQ是b、c的公垂线，当然$P \in b$，故P是b和α的交点，但b与α相交于B，所以P、B重合。同理Q、D重合。

于是，$b \perp PQ$，即$b \perp BD$。

又$b \perp AB$，且$AB \subset \alpha$，$BD \subset \alpha$，得$b \perp \alpha$，

同理$c \perp \alpha$。

从而$b \parallel c$，与b、c为异面直线矛盾，就是说，在$AB \parallel ED$的情况中PQ不与AB、ED都共面。

若AB与ED重合或部分重合（如图1-6），则易知BD为b、c的公垂线，这时三条公线AB、ED、BD都在α上。

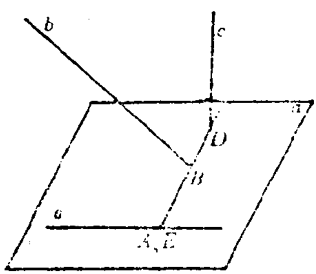

图1-6

但是，过AD所在的直线上任取一点P，作AD的垂直平面β。显见，$a \parallel \beta$，$b \parallel \beta$，$c \parallel \beta$，这与已知矛盾。

综上所述，知满足题意的三异面直线的公垂线中，至少有两条是异面直线。

评注 （1）证明中的论断是PQ不与AB、ED都共面，而与AB或ED之一共面是完全可能的。这与题断也是完全一致

的。

（2） 很容易忽视AB和ED重合的情况，没有它，题中“不平行同一平面”的条件就没有用上，论证也就不严格。

平面几何中所谓点共线问题，通常是指诸点在同一直线上，而不指在某一曲线上。点共曲线的问题则开辟为共圆问题。同样，立体几何中的共面问题，通常是指在同一平面上，而不是指在某个曲面上。由于中学知识的局限，很少探讨共球面的问题。这里，顺便举一点共球面的例子。

例5 平面上有两个外离的圆：$\odot O_1$和$\odot O_2$，两圆外有两定点M、N与圆共面。过M、N每一点所作两圆的切线长相等。那么，将平面沿MN折转在任意二面角$\theta(0°<\theta<180°)$之后，两圆周上所有的点在同一球面上。

分析 要证明一些点在同一球面上，可以设想这些点都与某个定点的距离相等，这个定点就是球心，本题的球心显然要在过每个圆心而垂直于各圆所在的平面的直线上。因此，本题的思路是：先证折转后过圆心而垂直于圆面的两条直线相交，再证交点到两个圆周上的各点的距离相等。

证明 先看折转之前的平面图（图1-7）。

设$\odot O_1$，$\odot O_2$的半径各为定值R，r，过M作两圆的切线MA，MB，又作$MH\perp O_1O_2$，H为垂足，已知$MA=MB$，有

$$MO_1^2-R^2=MO_2^2-r^2$$

即

$$MO_1^2-MO_2^2=R^2-r^2$$

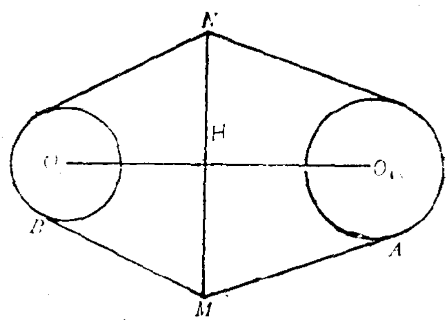

图1-7

又 $MO_1^2 = MH^2 + O_1H^2$, $\quad MO_2^2 = MH^2 + O_2H^2$

$\therefore \quad O_1H^2 - O_2H^2 = MO_1^2 - MO_2^2 = R^2 - r^2$

说明H在线段O_1O_2上，且它分O_1O_2所成两段的平方差是一定值R^2-r^2，因而H是一个定点，同理，过N作O_1O_2的垂线，其垂足也在这个定点上，故MN在过H的O_1O_2的垂线上，$MN \perp O_1O_2$于H。

再研究折转后的空间图形，如图1-8。

沿MN折转 θ角后，O_1、H、O_2不在同一直线上，过O_1、H、O_2作平面γ。

由 $MN \perp O_1H$，$MN \perp O_2H$知 $MN \perp \gamma$

令$\odot O_1$、$\odot O_2$所在的平面各为α，β。过O_1而垂直于α的直线为a，过O_2而垂直于β的直线为b。

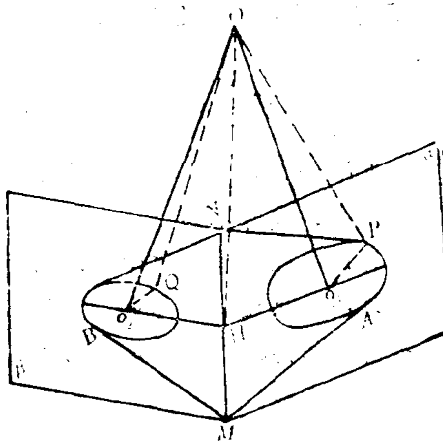

图1-8

于是 $a \perp MN$，$b \perp MN$。

O_1、O_2都在γ内，因而a、b在同一平面γ内。

显然，只要$\angle O_1HO_2 = \theta$不等于$0°$或$180°$，a、b就不会平行，可设a、b相交于O。

在$\odot O_1$的圆周上任取一点P，在$\odot O_2$的圆周上任取一点Q，便得如下等式：