

数学培优竞赛
新帮手
SHUXUE PEIYOUJINGSAI XINBANGSHOU

黄东坡 著

数学 培优竞赛 新帮手

SHUXUE
PEIYOUJINGSAI
XINBANGSHOU

初三年级

- 培养创造精神
- 培养创革意识
- 培养创新能力
- 反映新的大纲精神
- 探索新的解题方法
- 追求新的写作形式

湖北辞书出版社

数学培优竞赛

新帮手

SHUXUE PEIYOUJINGSAI XINBANGSHOU

黄东坡 著

数学培优竞赛

SHUXUE PEIYOUJINGSAI XINBANGSHOU

新帮手

初三年级

湖北辞书出版社

(鄂)新登字 07 号

数学培优竞赛新帮手(初三年级)

编 著:©黄东坡

责任编辑:丁 渝

封面设计:刘福珊

出版发行:湖北辞书出版社(武汉市黄陂路 75 号 430077)

印 刷:华中科技大学出版社印刷厂

经 销:新华书店

开 本:787×1092 1/16

插 页:1

印 张:13.75

版 次:2001 年 1 月第 1 版

印 次:2003 年 9 月第 9 次印刷

字 数:230 千字

印 数:77001—82000 册

定 价:15.00 元(简精装)

ISBN7-5403-0384-0/G·149

序

黄东坡，这是一个我们大家都非常熟悉的名字。我们熟悉他，并不是他的“特殊职位”，也不是他的“荣誉称号”，这些身外之物，他都没有。但他有另外两样东西，一是培优经验，二是他写的书。也许，这也是身外之物，但足以证明了他的价值。在水果湖——这个我省政治、文化中心，人们都争相把孩子送到他的门下，他所任的班通常被称为“实验班”或者“杯班”，这种班的学生都有一种在数学竞赛中展现才能的愿望，也只有高素质的教师才能满足这批学生的需要。正因为如此，他写的书才有一种真实性——培优过程的真实，材料运用的真实，训练方法的真实和学生发展的真实。1995年，他的第一本书《初中数学一题多解》（湖北教育出版社）出版，以后又相继出版了《初中数学解题讲座》（湖北辞书出版社）和《数学中考综合题解题讲座》（湖北辞书出版社）等，这些，都真实地反映了一个耕耘者为启迪学生心智、探索培优方案所作出的努力。在我的书架上，就有上述三本书。这，既是我女儿初中学习的纪念，也是我从事教学活动的参考，今天，又成了我乐意为新作写序的原因。

还有一个原因，就是我对作者治学精神的钦佩。一般说来，当一个人写了几本有影响的书，赢得了众多读者，往往就会被一群人拥为“主编”，当“主编”的好处是不能向外人道的。黄东坡的书足以奠定了他享有“主编”之尊的地位，但他没有这样做，甘愿在艰辛的道路上跋涉。这样，才有了今天的力作《数学培优竞赛新帮手》。这套书在保持真实性风格的同时集中表现了创新的特色，其中包括内容的创新，解题方法的创新和写作方式的创新。全书的每一课，都提供了阅读材料，每一道例题都提供了解题思路。作者希望学生思考的地方，都留下了空白，作者对数学的体验、见解和感悟，都可见诸于旁批。这种作者与读者通过对话达到心灵沟通的形式，也许是作者的首创。近年来的课堂教学中，我们特别强调学生参与的原则，今天，这一原则终于被作者迁移到了著书立说领域。看来，一个教书，一个写书，原来是一回事。

诚然，任何一本书，都很难适合每一个人的口味。比如，对数学爱好者而言，只要适当点拨就够了，他们需要一个思考的空间，但对另一些读者，可能会要求作者同时提供一个详尽解答。对作者的方案，我是赞成的，因为这一方案可以用建构主义的观点来解释。至于效果，我们现在只能说它在水果湖中学这一实验基地是成功的。推广后的情况如何？那就得等待读者诸君用实践来回答了。

裴光亚

2000年12月于汉口杨汊湖

新世纪 新思考 新探索

——写在前面

当本套书出版的时候，我们已跨入新的 21 世纪，新世纪充满着新的机遇与挑战，也孕育着新的思想与新的观念。

在世纪之交的关键时期，数学教育思想与观念、教育方法与手段已发生巨大而深刻的变化。培养学生创造精神、创新意识，注重学生探索能力、实践能力的提高，成为新世纪数学教育的主题。

本套书的编著宗旨为“立足培优，面向竞赛”，为此，将初中数学剖分组织为 84 个专题讲座形式，配合教学进度，顺应学习过程，为教师提供一种崭新的指导思路，为学生提供一种科学的训练方法，在编著过程中，力求突出以下几点：

1. 反映新的大纲精神

本套书以义务教育阶段《国家数学课程标准》为背景，以最新修订后的《初中数学教学大纲》、《初中数学竞赛大纲》为指南，力图反映新的大纲精神，即：培养学生的科学精神和创新思维习惯，激发学生独立思考和创新意识。

2. 探索新的解题方法

本套书以近年全国各地中考试题、全国各级数学竞赛试题为编选范围，以启发性、新颖性和导向性为原则，收集了从 1997 ~ 2000 年全国各地中考、各级竞赛中的典型问题，集中反映新中考新竞赛的新特点，如：由知识立意转向能力立意，在知识的交会点上命题，强调应用意识的培养，倡导问题的开放性、探索性，等等。

3. 追求新的写作形式

本套书运用“开窗式”写作方法，例题只给出提示性的解题思路，留给学生充分的思维空间、思考时间和解答空隙，疑难之处或需升华之处均以旁批的形式提醒读者，其内容包含“数学历史、数学最新进展、解题技巧、数学思想方法、问题推广与引申”等丰富知识，旨在营造一种数学文化氛围，让读者在有限的篇幅内获得数学文化的熏陶和创造机智的启蒙。

愿本套书成为你学习中的“好帮手”。

多年来，武汉市教研室裴光亚先生给予我悉心的关怀、鼓励与帮助，又在百忙中为本书作序，在此表示诚挚的谢意；感谢本书重印时，陈迪春、龙艳、朱洁华、黄泽群、孙银枝给予的帮助。

黄东坡

二〇〇二年二月

于湖北省水果湖第二中学

目 录

知识篇

1. 一元二次方程	(1)
2. 二次方程的根的判别式	(6)
3. 根与系数的关系	(10)
4. 一元二次方程的整数根	(15)
5. 分式方程与无理方程	(19)
6. 特殊方程、方程组	(24)
7. 一元二次方程的应用	(29)
8. 函数的基本知识	(35)
9. 一次函数	(42)
10. 二次函数	(49)
11. 二次函数与二次方程	(57)
12. 双曲线	(62)
13. 最值问题	(67)
14. 数据分析	(72)
15. 三角函数	(80)
16. 圆的对称性	(86)
17. 与圆有关的角	(92)
18. 直线与圆的位置关系 (1)	(98)
19. 直线与圆的位置关系 (2)	(105)
20. 与圆有关的比例线段	(111)
21. 圆与圆的位置关系	(117)
22. 平面几何的定值与最值问题	(124)
23. 探索性问题	(130)

方法篇

24.	分类讨论	(138)
25.	数形结合	(143)
26.	逆向思维	(147)
27.	方程思想	(151)
28.	函数思想	(155)

一元二次方程

阅读与思考

一元二次方程是解数学问题的重要工具，在因式分解、代数式的化简与求值、应用题、各种代数方程、几何问题、二次函数等方面有广泛的应用。

初学一元二次方程，需要注意的是：

1. 熟练求解

解一般形式的一元二次方程，因式分解法是基础，它体现了“降次求解”的基本思想；公式法具有一般性，是解一元二次方程的主要方法，对于各项系数较大的一元二次方程，可以先从分析方程的各项系数特征入手，通过探求方程的特殊根来求解，常用的两个结论是：

- ①若 $a+b+c=0$ ，则方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 必有一根为 1；
- ②若 $a-b+c=0$ ，则方程 $ax^2-bx+c=0$ ($a \neq 0$) 必有一根为 -1。

2. 善于变形

解有些与一元二次方程相关的问题时，直接求解常给解题带来诸多不便，若运用整体思想、构造零值多项式、降次变形等相关思想方法，则能使问题获得简解。

例题与求解

例 1 已知 $a + \frac{1}{a} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ ，则 $a^5 + \frac{1}{a^3}$ 的值等于_____。

(第十一届“希望杯”邀请赛试题)

解题思路 待求式无规律可循，考虑求出 a 的值，再代入求值。

一元二次方程的求根公式

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ 这个}$$

公式形式优美，内涵丰富：

①公式展示了数学的抽象性、一般性与简洁美；

②公式包含了初中阶段所学过的全部六种代数运算；

③公式本身回答了解一元二次方程的全部三个问题：方程有没有实数根？有实根时共有几个？如何求出实根？

一元一次、二次、三次、四次方程都可以求解，它们的根都由其系数的六种运算表示出来，十九世纪二十年代，挪威数学家阿贝尔认识到一般的四次以上方程没有公式解，但在什么条件下可解，在什么条件下不可解，还是不得而知，大约过了十年，法国数学家伽罗华彻底回答了这个问题，并创立了群的概念，对现代数学产生了巨大的影响。

例2 方程 $|x| - \frac{4}{x} = \frac{3|x|}{x}$ 的实根的个数为 ().

(1998年山东省竞赛题)

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

解题思路 通过去分母、去绝对值符号, 将绝对值方程转化为一元二次方程求解.

例3 已知 m, n 是二次方程 $x^2 + 1999x + 7 = 0$ 的两个根; 求 $(m^2 + 1998m + 6)(n^2 + 2000n + 8)$ 的值.

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

解题思路 若求出 m, n 值或展开待求式, 则计算繁难, 由方程根的定义可得 m, n 的等式, 不妨从变形等式入手.

例4 设 x_1, x_2 是二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个根, 求 $x_1^3 - 4x_2^2 + 19$ 的值.

(全国初中数学联赛试题)

解题思路 解题的关键是使关于 x_1 的三次式降次.

例5 已知方程 $x^2 - mx + m + 5 = 0$ 有二实根 α, β ; 方程 $x^2 - (8m + 1)x + 15m + 7 = 0$ 有二实根 α, γ , 求 $\alpha^2\beta\gamma$ 的值.

(北京市竞赛题)

解题思路 由题意知 α 是两方程的公共根, 由于两方程的根不便求出, 因此, 应从消去二次项入手.

一元二次方程常见的变形方法有:

(1) 把 $ax^2 + bx + c = 0$

变形为 $ax^2 = -bx - c$;

(2) 把 $ax^2 + bx + c = 0$

变形为 $ax^2 + bx = -c$;

③ 把 $ax^2 + bx + c = 0$

变形为 $ax + \frac{c}{x} = -b$.

其中①、②体现了“降次”代换的思想. ③则是构造倒数关系作等值代换.

公共根问题是一元二次方程常见问题, 解这类问题的基本方法是:

①若方程便于求出简单形式的根, 利用公共根相等求解;

②设出公共根, 设而不求, 消去二次项.

能力训练

A 级

1. 已知 $x = \sqrt{3} - 1$, 那么 $\frac{3-2x^2-4x}{x^2+2x-1} =$ _____.

(第十届“希望杯”邀请赛试题)

2. 设 a, b 是两个自然数, 如果将运算符号“ \ast ”规定为 $a \ast b = a^2 + b^2 + a + b$, 那么方程 $(x+2) \ast x = 26$ 的正整数解为 _____.

3. 设方程 $x^2 + 1993x - 1994 = 0$ 和 $(1994x)^2 - 1993 \cdot 1995x - 1 = 0$ 的较小的根分别为 α, β , 则 $\alpha \cdot \beta =$ _____.

4. 方程 $|x^2 + 4x - 5| = 6 - 2x$ 的解应是 _____.

(上海市竞赛题)

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 + 3m^2x + m^2 + 3m - 4 = 0$ 有一个根为 0, 则 m 的值是 ().

(A) -4 或 1 (B) 4 或 -1 (C) -4 (D) -1

6. 若 α, β 是方程 $x^2 - 3x - 5 = 0$ 的两个根, 则 $\alpha^2 + 2\beta^2 - 3\beta$ 的值是 ().

(1998 年江苏省扬州市中考题)

(A) 21 (B) 24 (C) 27 (D) 29

7. 已知 a, b 都是负实数, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a-b} = 0$, 那么 $\frac{b}{a}$ 的值是 ().

(1999 年江苏省竞赛题)

(A) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (C) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

8. 方程 $x^2 - |x| - 1 = 0$ 的解是 ().

(A) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(C) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (D) $\pm \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

9. 已知 α 是方程 $x^2 - 1999x + 1 = 0$ 的一个根, 求 $\alpha^2 - 1998\alpha + \frac{1999}{\alpha^2 + 1}$ 的值.

10. 已知 $a^2 + 4a + 1 = 0$, 且 $\frac{a^4 - ma^2 + 1}{2a^3 + ma^2 + 2a} = 3$, 求 m 的值.

(1997 年湖北省荆州市竞赛题)

11. 已知 a 是方程 $x^2 - 6x - 1997 = 0$ 的一个正根, 求代数式 $8 + \frac{1997}{6 + \frac{1997}{6 + \frac{1997}{a}}}$ 的值.

(第十二届江苏省竞赛题)

B 级

1. 已知 α, β 是方程 $x^2 + (m-2)x + 1 = 0$ 的两根, 则 $(1 + m\alpha + \alpha^2) \cdot (1 + m\beta + \beta^2)$ 的值为_____.

2. 若关于 x 的方程 $x^2 + px + q = 0$ 与 $x^2 + qx + p = 0$ 只有一个公共根, 则 $(p+q)^{1999} =$ _____.

3. 设 a, b 是整数, 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有一个根是 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$, 则 $a + b =$ _____.

(全国通讯赛试题)

4. 已知 m 是方程 $x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$ 的根, 则 $\frac{m^3 - 1}{m^5 + m^4 - m^3 - m^2}$ 的值等于_____.

(全国初中数学联赛试题)

5. 已知 $\frac{1}{a} - |a| = 1$, 那么代数式 $\frac{1}{a} + |a|$ 的值为 ().

(1999 年全国初中数学竞赛题)

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ (C) $-\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{5}$

6. 方程 $x|x| - 3|x| + 2 = 0$ 的实根的个数为 ().

(1998 年“五羊杯”竞赛题)

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

7. 已知 $x^2 - 5x - 1991 = 0$, 则代数式 $\frac{(x-2)^4 + (x-1)^2 - 1}{(x-1)(x-2)}$ 的值为 ().

(A) 1996 (B) 1997 (C) 1998 (D) 1999

8. 设 $a > 0, b > 0$ 且满足 $\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 3\sqrt{b}(\sqrt{a} + 5\sqrt{b})$, 则 $\frac{a-b+\sqrt{ab}}{2a+3b+\sqrt{ab}}$ 的值为 ().

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) 2 (D) $\frac{31}{58}$

9. 已知 $x = \sqrt{19-8\sqrt{3}}$, 求 $\frac{x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23}{x^2 - 8x + 15}$ 的值.

(第九届“祖冲之杯”邀请赛试题)

10. 已知 $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$, 求 $x + \frac{1}{x}$ 的值.

(1999 年重庆市竞赛题)

11. 首项系数不相等的两个二次方程

$$(a-1)x^2 - (a^2+2)x + (a^2+2a) = 0 \quad \text{①}$$

$$\text{及 } (b-1)x^2 - (b^2+2)x + (b^2+2b) = 0 \quad \text{②}$$

(其中 a 、 b 为正整数) 有一个公共根, 求 $\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$ 的值.

(全国初中数学联赛试题)

2 二次方程的根的判别式

阅读与思考

一元二次方程的根的判别式是揭示根的性质与系数间联系的一个重要定理,是解直接或间接与一元二次方程相关问题的有力工具,其主要应用于以下几个方面:

1. 判断方程实根的情况;
2. 求方程中字母系数的值、字母间的关系、字母的取值范围;
3. 证明等式或不等式;
4. 利用一元二次方程必定有解的代数模型,证明几何存在性问题.

许多表面与一元二次方程无关的数学问题,可以通过构造一元二次方程,把原问题转化为讨论方程的根的性质,然后用判别式来解,这是运用判别式解题的技巧策略.

例题与求解

例 1 如果方程 $x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 3px^2 - 9px + 2p^2 = 0$ 有且仅有一个实根(相等两实根算作一个),则 p 的值为_____.

(1998年湖北省黄冈市竞赛题)

解题思路 从判别式入手,解题的关键是将原方程转化为一元二次方程.

例 2 已知三个关于 x 的方程: $x^2 - x + m = 0$, $(m-1)x^2 + 2x + 1 = 0$ 和 $(m-2)x^2 + 2x - 1 = 0$,若其中至少有两个方程有实根,则实数 m 的取值范围是().

(1998年山东省竞赛题)

- (A) $m \leq 2$ (B) $m \leq \frac{1}{4}$ 或 $1 \leq m \leq 2$
(C) $m \geq 1$ (D) $\frac{1}{4} \leq m \leq 1$

解题思路 直接求使三个方程中至少有一个方程有实根的 m 的取

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个实根;

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相异实根;

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等实根;

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实根.

需要注意的是:

(1) 运用判别式解题,其实质是将问题转化为解方程、解不等式;

(2) 只有当二次项系数不等于 0 时,才可以使用不等式,解含字母的二次方程时,必须加上二次项系数不为 0 这个隐含条件.

正难则反是一个重要的解题技巧,为了避免因讨论带来的麻烦,可以从反面来考虑,即先求出三个方程都没有实根时相应的 m 的范围,然后剔除这一范围,读者不妨一试.

值范围，要分多种情况讨论.

例 3 已知 $x^2 - ax + 3 - b = 0$ 有两个不相等的实数根, $x^2 + (6 - a)x + 6 - b = 0$ 有两个相等的实数根, $x^2 + (4 - a)x + 5 - b = 0$ 没有实数根, 求 a, b 的取值范围.

(1997 年江苏省竞赛题)

解题思路 易得关于 a, b 的等式与不等式, 需把含有两个字母的不等式转化为只含一个字母的不等式, 不妨从 $\Delta = 0$ 入手.

在解涉及到多个二次方程的问题时, 我们能得到由等式、不等式组成的混合组, 需在整体思考、消元降次等思想引导下, 综合运用方程、不等式的知识.

例 4 已知 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, $abc = 8$, 且 $c > 0$, 求证: $c \geq 2\sqrt[3]{4}$.

(北京市竞赛题)

解题思路 设法构造关于 c 的一元二次方程, 这是解本例的突破口.

构造一元二次方程是解题的常用技巧, 构造的主要方法有:

(1) 当已知等式具有相同的结构, 就可把两个变元看成关于某个字母的一元二次方程;

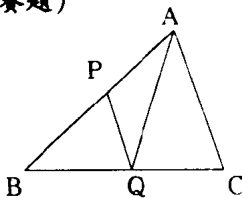
(2) 当问题有形如 $x + y = a$, $xy = b$ 的关系式时, 则 x, y 可看成方程 $t^2 - at + b = 0$ 的两实根;

(3) 对于含有多个变元的等式, 可以将等式整理为关于某个字母的一元二次方程.

例 5 如图, 已知 $\triangle ABC$ 与平行于 AC 的直线 PQ 相交, 且 $\triangle APQ$ 的面积等于定值 k^2 , 那么当 k^2 与 $\triangle ABC$ 的面积 S 之间满足什么关系时问题有解? 有多少解?

(上海市竞赛题)

解题思路 恰当引元, 根据已知条件和图形的数量特征, 构造一个一元二次方程, 再由实根存在的条件, 使问题获得解决.



A 级

1. 已知一元二次方程 $kx^2 - (2k-1)x + k = 0$ 有两个不等的实根, 则 k 的取值范围是____; 若关于 x 的方程 $x^2 - 2\sqrt{k}x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是_____.

2. 已知 $\sqrt{a+4} + |b+1| = 0$, 当 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 方程 $kx^2 + ax + b = 0$ 有两个相等的实数根.

3. 设 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 三边的长, 且关于 x 的方程 $c(x^2 + n) + b(x^2 - n) - 2\sqrt{na}x = 0$ ($n > 0$) 有相等的两个实数根, 则 $\triangle ABC$ 是_____三角形.

(1998年山西省中考题)

4. 方程 $x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 3 = 0$ 的实数解为_____.

(安徽省竞赛题)

5. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k+1)x + k - 1 = 0$ 的根的情况是 ().

- (A) 有两个相等的实数根 (B) 有两个不相等的实数根
(C) 有两个实数根 (D) 没有实数根

6. 如果关于 x 的方程 $mx^2 - 2(m+2)x + m + 5 = 0$ 没有实数根, 那么关于 x 的方程 $(m-5)x^2 - 2(m+2)x + m = 0$ 的实根的个数为 ().

(全国初中数学联赛试题)

- (A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) 不确定

7. 设 x_0 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根, 则判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与平方式 $M = (2ax_0 + b)^2$ 的关系是 ().

- (A) $\Delta > M$ (B) $\Delta = M$ (C) $\Delta < M$ (D) 不确定

8. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长, 且方程 $(c-b)x^2 + 2(b-a)x + (a-b) = 0$ 有两个相等的实数根, 则这个三角形是 ().

- (A) 等腰三角形 (B) 等边三角形
(C) 直角三角形 (D) 不确定

9. 已知关于 x 的方程① $x^2 - (1-2a)x + a^2 - 3 = 0$ 有两个不相等的实数根, 且关于 x 的方程② $x^2 - 2x + 2a - 1 = 0$ 没有实数根, 问 a 取什么整数时, 方程①有整数根?

(1999年浙江省舟山市中考题)

10. 已知 m, n 为整数, 关于 x 的三个方程: $x^2 + (7-m)x + 3 + n = 0$ 有两个不相等的实数根; $x^2 + (4+m)x + n + 6 = 0$ 有两个相等的实数根; $x^2 - (m-4)x + n + 1 = 0$ 没有实数根, 求 m, n 的值.

(安徽省中考题)

11. 设 a, b, c 为互不相等的非零实数, 求证: 三个方程 $ax^2 + 2bx$

原
书
缺
页

3 根与系数的关系

阅读与思考

根与系数的关系称为韦达定理，其逆定理也成立，它是由16世纪的法国数学家韦达发现的，韦达定理形式简单而内涵丰富，在数学解题中有着广泛的应用，主要体现在：

1. 求方程中字母系数的值或取值范围；
2. 求代数式的值；
3. 结合根的判别式，判断根的符号特征；
4. 构造一元二次方程；
5. 证明代数等式、不等式。

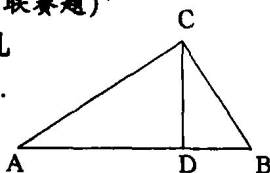
当所要求的或所要证明的代数式中的字母是某个一元二次方程的根时，可先利用根与系数的关系找到这些字母间的关系，然后再结合已知条件进行求解或求证；这是利用根与系数的关系解题的基本思路，需要注意的是，应用根与系数的关系的前提条件是一元二次方程有两个实数根，所以，应用根与系数的关系解题时，必须满足判别式 $\Delta \geq 0$ 。

例题与求解

例1 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，斜边 $AB=5$ ， $CD \perp AB$ ，已知 BC 、 AC 是一元二次方程 $x^2 - (2m-1)x + 4(m-1) = 0$ 的两个根，则 m 的值是_____。

(五城市联赛题)

解题思路 运用根与系数的关系、相关几何定理，建立一个以字母系数 m 为主元的方程。



例2 如果方程 $(x-1)(x^2-2x+m)=0$ 的三根可以作为一个三角形的三边之长，那么，实数 m 的取值范围是()。

(全国初中数学竞赛试题)

(A) $0 \leq m \leq 1$

(B) $m \geq \frac{3}{4}$

请读者思考：当方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 两根分别互为相反数、互为倒数、同为正、同为负、异号时，应分别具备什么条件？

运用根与系数的关系解题时，我们必须明确：

(1) 设而不求；

(2) 根与系数的关系两个等式的左边是两个基本对称式，而任何一个对称多项式都可以用基本对称多项式表示；

(3) 有时需构造二次方程，为判别式、根与系数关系的应用创设条件。