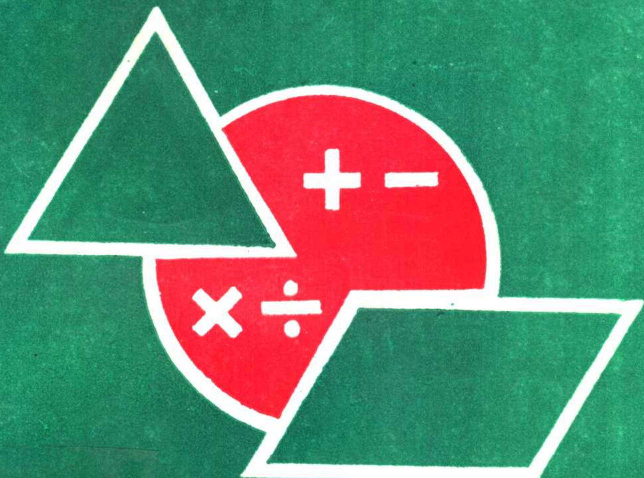
中学数学习题教学研究



李建才　连四清　熊　军　编著

北京师范学院出版社

中学数学习题教学研究

李建才　连四清　熊　军　编

北京师范学院出版社

（京）新208号

中学数学习题教学研究

编　　者　李建才　连四清　熊　军
出版发行　北京师范学院出版社
社　　址　北京西三环北路105号(邮政编码100037)
经　　销　全国新华书店
印　　刷　三河市科教　　印刷厂
开　　本　787×1092 1/32　　　印　数 0.001—10.500册
字　　数　300 千字　　　　　　印　张 14.375
版　　本　1993年10月　第1版
　　　　　1993年10月　第1次印刷
书　　号　ISBN7-81014-746-3/G·605
定　　价　8.20　元

前　言

数学教育正在蓬勃发展，数学教育改革正在深入展开，数学教育学作为学科教育学的一个独立学科也正在形成之中。

现代数学教育理论认为，数学教学是数学活动的教学，解题活动又是数学活动的主导部分，而解题活动的实质是思维活动，也就是发现问题、解决问题的全过程。因此，数学教学中离不开解题，习题的教与学在数学教学中应占有相当重要的地位，应发挥应有的作用。这就是现代数学教学中强调“解题教学是中心”，突出“解题教学的主导地位”的思想基础，也就是人们在长期的教学实践中形成“学数学，就必须做习题，不做一定量的数学习题，就学不好数学”的观念的立足点。事实上，这是由数学教学目的决定的一条必由之路。因为数学教学的目的在于，使学生在数学基础知识、数学能力、数学素质（包括情感、意志、态度等非智力因素）等几方面都得到充分的提高和发展，以形成良好的个性品质结构。而解题正是达到以上目的的最有效手段。

基于以上认识，在同行们的感召下，我们结合几年来的教学实践，汇集了多年来的思考，写成了“数学习题的教学研究”这一书稿，目的是为我国数学教育的学科建设献上一份心意，如果能供广大的数学教师、数学教育工作者、数学学习的爱好者在实践中参考，在研究中进一步深入探讨，那我们就心满意足了。同时我们在编写时，力图从数学特别是

数学习题本身的特点出发，运用教育理论、心理学、逻辑学的观点方法，结合中学数学教学的实践，对数学习题进行学习论、教学论和方法论的分析研究，并尽力落实到教与学的具体实施途径上，相信会对中学数学的教与学有一定的启发和指导。

我们也知道，数学教育学科的形成和建立是不易的，需要我国数学界、数学教育界及教育心理学界等诸多学科界的专家同行们的通力合作、共同探求，需要较长期的实践检验、总结。但只要人人能奉献上一份力量，中国特色的数学教育学的形成和创立是指日可待的。

在编写过程中，我们查阅和参考了不少同志的经验、文章和专著。同时，自始至终得到了北京师范学院出版社，特别是赵永明和杨鸿雷同志的支持和帮助，在此，对这些同志特致谢意。

由于我们的知识水平和教学实践都有限，书中难免有不当之处，恳望大家批评、指正。

编著者

1992.6.29

于北京师院数学系

目　录

第一章 概 论

§1 数学习题的意义

一、从数学问题谈起

数学问题是数学学科中的一种疑难和矛盾，正是它的提出和解决，激发我们去学习、去实践、去观察、去思考、去发展知识，也正是它的提出和解决推动着数学科学的不断运动与发展。数学家与数学教育家们无一不懂得数学问题在数学发展、数学教育以及个人创造活动中的重要地位和作用，他们毕生都致力于设计提出、解决那些重大而关键的问题，以巨大的热情追求着数学学科的发展。正如现代数学巨匠希尔伯特以亲身体会所强调的那样："数学研究也需要自己的问题。正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁意志，发现新方法和新观点，达到更为广阔和自由的境界"。著名数学家波利亚也明确指出："掌握数学就是意味着善于解题，不仅善于解一些标准题，而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题"。数学家P·R·Halmos还特别指出："只有问题才是数学的心脏"。

数学问题的形式是多种多样的，涉及的内容很广泛。但所有数学问题都有一个共同的特点：每一个数学问题都有一定的知识背景，就是说，每一个数学问题都是在已有的数学概念、理论、方法等背景中提出的。这样一来，我们就可以

依照数学问题的解答与知识背景的关系，将问题分为两大类：常规问题与非常规问题。

所谓常规问题，就是那些在已有数学理论框架内便可以得到解决的数学问题。也就是用已有的数学概念、原理、方法和技巧就可以解决的数学问题。这些问题的解决通常是在已有数学思想方法的范畴内，只能引起数学知识的巩固和稳步增长，而不会在理论框架上有所突破。现代数学文献上的文章，特别是数学教科书上的习题（包括中学数学教科书上的练习题、复习题）大都属于数学常规问题。

所谓非常规问题，就是那些从已有理论框架的研究中提出的问题，但不能在这一框架内求得解决，需要开拓新的理论、创造新的方法才能解决。这些问题的解决不仅能引起数学知识的增长，更重要的是引起数学在内容、方法上的重大变革，促进数学科学的发展。在数学发展史上，导致数学思想方法根本变革的一些重大转折的问题、数学家由社会实践和数学理论内部提出并正在攻取、研讨的一些可能解决，也可能不能解决的数学问题都属于非常规问题。

在中学数学教学内容中，涉及到数学思想方法转折的一些问题，亦可在狭义上属于非常规问题，尽管它在数学学科的整体范围内仍属于常规问题。象代数思想方法、函数思想方法、极限思想方法的开始，需要学生象数学家当初思考问题时那样，突破原有思想方法和已有理论框架去解决问题。

二、中学数学中的习题

在中学数学教学内容中，结合数学的教学体系（不同于数学学科的科学体系）都包含有不可缺少的数学习题，这些习题都是常规问题。

广义地说，数学的基本理论，即数学中的概念、定理、

公式、法则都是典型的数学问题。这些基本理论作为数学活动的结果，在教学中不仅要介绍这些结果，而且要再现这些结果产生的数学活动过程。也就是要充分揭示数学问题被发现、被解决的思维过程。从这个意义上讲，数学的基础理论知识与数学习题在教学中是无本质区别和差异的。应该说它们都是发现问题、解决问题的过程，都是思维训练的结构材料，都遵循共同的规律。可以一般地讲，数学基础理论的发生、发现和形成过程和基础知识的应用过程是统一的，基础知识和习题同样是数学教学中不可缺少的。建立和发展数学知识结构、形成和提高数学思维能力、培养和造就创造性精神都是数学教育的目的和任务。

1．什么是数学习题？

在中学数学教材中，围绕数学内容的基础理论和数学思想方法的知识系统，为深入理解、巩固和应用这些知识、培养和发展相应的数学能力、提高受教育者的数学素质（包括情感、意志、态度等非智力因素）、促进良好品格的形成而设置的任何计算、证明或研究的例题、练习题、习作题、复习题等，都称之为数学习题。不难发现，每一个习题，都是前面所述的常规数学问题。我们不妨用“系统的概念”来理解数学问题：

数学问题可以视为由初始状态（已知条件）、终结状态（结论）、解（由已知条件到结论的数学转化过程）、解题基础（转化过程的数学理论和实践基础）四个基本要素组成的系统R，把它放在由解题者——人（记为S）和题组成的大系统（S，R）中来考查，则可分为：

如果解题者S对系统R中的四个要素全部是已知的，那么就称系统R相对于S来说是稳定系统，记为R_0。这时就叫

标准性题；

如果解题者S对系统中的四个要素至少有一个是未知的，且至少有一个是已知的，那么就称系统R相对于S来说是问题系统，记为R_x。这时就叫数学习题。

因此，数学习题就是不管用什么方式要求人从问题系统R_x中确定他不了解的要素、性质和关系时，所给出的一种有明确目的指示形式；而解题，就是人将其问题系统转化为稳定系统（即$R_x \to R_0$）；解题过程则是人寻求解答的转化活动的过程。

2． 数学习题的分类

首先，我们根据数学习题R_x中的四个要素是否都是数学对象，可将数学习题宏观地分为两大类：

Ⅰ若初始状态、终结状态、解、解题基础都是数学对象，我们就称之为纯粹数学习题；

Ⅱ若仅在解、解题基础中出现数学内容，我们称之为数学应用题。

其次，还可根据数学习题R_x中，对学生而言，未知要素的个数，将习题微观地分为以下三类不同确定度的习题：

未知要素个数	习题类型	符号	确定度
3	问题性习题	R_x^3	最不确定
2	探索性习题	R_x^2	较不确定
1	训练性习题	R_x^1	确定

应该指出，习题的这种分类是相对于学生而言的，无论哪一类型习题，最终目的都是要求解题者将习题系统R_x逐步

降格直至化归为稳定系统R_0。其中要特别注意：

（1）同一个习题，对于不同的学生可以属于不同的类型。例如：解一元二次方程$x^2-x-2=0$，对于初中一年级学生来说是R_x或R_x^2型题；而对于学习了一元二次方程解法的初二学生则是R_x^1型题；对于初三以上的学生就不是问题，而是稳定系统R_0了。

（2）学生知识的增长、经验的丰富都可以使一个习题所属的类别"上浮"或"下调"。一般来说，学生接触习题的次数增加，所学的知识增多，习题会逐步下调类别，其教学价值也就随之而降低了。

（3）习题的分类，总体上是为了反映教学过程的动态特点，这就是我们提出的解题过程的转化程序：

问题性习题⟶探索性习题⟶训练性习题⟶标准稳定系统R_0。从而，为实现习题的某些教学功能而灵活选择解题方法。

例如：对于刚学过三角形全等判定定理的初二学生来说，

问题1 若线段AB与CD互相平分于O点，则$\triangle AOC\cong\triangle BOD$。就是训练性$R_x^1$型题；

问题2 若线段AB与CD互相平分于O点，则$\triangle AOC$与$\triangle BOD$有什么关系？就属于探索性的R_x^2型题；

问题3 当线段AB与CD在什么位置的时候，才能构成

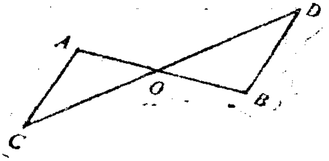


图 1-1

全等三角形？就属于问题性的R_x型题了。

以上足以说明，随着未知要素的增加，习题的确定程度就逐渐减少，不确定度的发散性就愈来愈大，问题的发展和变化也会更加广阔。解决问题的思维跨度也愈加广大，增加思维能力的深度也就更大。

3． 数学习题与基础知识、基本能力

在中学数学的教学与学习过程中，始终包括着深刻而牢固地掌握基础知识和培养、提高能力这两方面的目标，从而通过数学的教与学，使学生具备高度的数学素养和全新的人格品德，成为现代社会有用的人才。这就要求在中学数学的教学过程中，结合数学基础知识、基本技能的教学，按照培养独立、创造性的学习数学能力的方向，有计划地安排一整套中学数学习题，为学生学习数学创造积极地应用数学知识的环境和条件。因此，可以发现：

数学习题都有一定的知识背景或现实原型。不同类型的习题中，含有巩固基础知识、深化数学认知、增进数学思维能力，强化创造性应用知识、领略数学思想方法、培养数学能力的丰富信息。数学习题的解决过程中，不仅可以促使学生深刻地理解掌握数学基础知识、技能技巧，不断完善认知结构；而且对于培养和发展学生独立思考、勇于实践、敢于创新的数学思想、方法和数学能力也具有极其重要的作用。

一般说，数学的基础理论知识是数学习题的基础背景和核心；数学习题是数学基础理论知识应用的延伸和发展，二者的密切配合是中学数学教学的统一整体，也是现代数学教学理论的中心课题。

例如，近年来全国高等学校统一招生考试的题目中，总有“分类讨论”的题，它就是通过习题的形式，考核学生是否

具备坚实的基础知识和基本技能，是否具备灵活应用理论知识和多种数学思想方法，去分析和解决问题的综合能力。这就要求在平时教学中所编训练习题，及考核命题中要有目的的使题目含有这些基础知识背景，含有培养和发展数学思想方法与数学分类讨论能力的内在因素，以求落实巩固知识、训练思维的实效。

例1　针对复数三角式的概念和分类讨论的方法，拟出习题：

化$1+i\operatorname{tg}\theta$为复数三角形式。

略解　由于

$$\left.\begin{array}{l}1+i\operatorname{tg}\theta=\sec\theta(\cos\theta+i\sin\theta)\\ \theta\neq\pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$1°$ 当$\theta\in\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$\sec\theta>0$，

$\therefore\quad 1+i\operatorname{tg}\theta=\sec\theta(\cos\theta+i\sin\theta)$；

$2°$ 当$\theta\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)$时，$\sec\theta<0$，

$\therefore\quad 1+i\operatorname{tg}\theta=-\sec\theta[\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)]$.

显见，本题中含有对复数三角式的正确理解和由于θ的区间不同而进行分类讨论的思想方法。本题的解决无疑可以达到巩固基础知识、训练思维的效果。

例2　针对解方程和复数概念、分类讨论方法，可以拟出习题：

设$a\geqslant0$，在复数集C中解方程$Z^2+2|Z|=a$。

略解　设$Z=x+yi$，代入原方程则有

$$x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}+2xyi=a,$$

即 $$\begin{cases} x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}=a, & ① \\ 2xy=0. & ② \end{cases}$$

由②可知$x=0$或$y=0$，由此可见，原方程若有解，则成为实数或为纯虚数，因而以下分两种情况讨论：

1° 若$y=0$，则原方程为

$x^2+2|x|=a \Longleftrightarrow |x|^2+2|x|-a=0$,

$\therefore$ $|x|=-1+\sqrt{1+a}$.

$\therefore$ 原方程的实数解为$Z=\pm(-1+\sqrt{1+a})$；

2° 若$x=0$，$y\neq0$（$y=0$已讨论过），则原方程有纯虚数解$Z=yi$，代入原方程，此时有：

$-y^2+2|y|=a \Longleftrightarrow -|y|^2+2|y|-a=0$. (*)

根据a的取值，可再分三种情形讨论如下：

(A)当$a=0$时，$\because y\neq0$，$\therefore |y|=2$，

$\therefore$ $Z=\pm2i$；

(B)当$0<a\leqslant1$时，解得$|y|=1\pm\sqrt{1-a}$，

$\therefore$ $Z=\pm(1\pm\sqrt{1-a})i$；

(C)当$a>1$时，方程（*）无解，

$\therefore$ 原方程无纯虚数解.

显然，本题除含有对解方程、复数概念的基础知识背景外，解的过程中要求对分类讨论的思想方法有一定的掌握．其中定向——按复数的实虚部及参数a的取值范围确定分类标准；定法——先按二分法，后按三分法进行讨论；定序——按照复数的实部到虚部，a的取值由特殊到一般，由小到大的顺序讨论，就是掌握这种思考方法的基本模式．其中定向是关键，定法是重点、定序是难点．一般说来，分类讨论的定向要求确定分类标准，做到分类独立且完备，不重不