高等学校数学系列教材

微积分辅导与习题精解（上册）

哈尔滨工程大学应用数学系 编

哈尔滨工程大学出版社

微积分辅导与习题精解

（上　册）

哈尔滨工程大学应用数学系　编

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分辅导与习题精解/哈尔滨工程大学应用数学系编.
—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2003.7
ISBN 7-81073-338-9

Ⅰ.微…　Ⅱ.哈…　Ⅲ.微积分-高等学校-教学
参考资料　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 050586 号

内 容 简 介

本书是配合哈尔滨工程大学应用数学系出版的《微积分教程》一书而编写的高等数学辅导参考书。

本书共分上、下两册。上册内容包括:函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何。下册内容包括:多元函数微分法、重积分、曲线与曲面积分、无穷级数、常微分方程。

每册共分两部分。第一部分是学习辅导及练习。每章总结了本章课程的基本内容,选择了典型例题,配置了练习题。第二部分给出了《微积分教程》中的部分习题的详细解答。

本书是供各类工科及成人高校高等数学学习使用的辅导书籍,也可用作习题课教材,同时还可作为报考硕士研究生数学复习的参考书籍。

哈 尔 滨 工 程 大 学 出 版 社 出 版 发 行
哈尔滨市南通大街145号　哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)2519328　邮编:150001
新　华　书　店　经　销
黑 龙 江 省 教 育 厅 印 刷 厂 印 刷

*

开本 850mm×1 168mm　1/32　印张 10.25　字数 261 千字
2003 年 8 月第 1 版　　2003 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—4 000 册
定价:14.00 元

前　言

微积分课程是工科大专院校学生的必修课。这门课程学习的重要性不仅在于它是一门基础课、工具课，还在于它对学生抽象思维、逻辑推理能力的培养和训练，对运算技能、综合应用能力的锻炼和提高等方面都起到了其它课程难以替代的积极作用。而对本课程的学习除了有好的教材外还应有与之配套的学习辅导书，以有助于对课程内容的理解与消化，对所学知识的巩固与扩展，对计算技能的掌握和提高。

本书由应用数学系许多教师在总结多年教学经验及积累的丰富教学资料的基础上编写。本书大部分习题是根据国家教委颁发的“高等工业学校高等数学课程教学基本要求”选配的。另有部分题目难度超出了“基本要求”的范围，供学习尚有余力的读者使用。

参加本书编写的教师有：林锰、于飞（第一章），范崇金（第二章），董衍习（第三章），沈艳（第四章），王锋（第五章），张晓威（第六章），李斌（第七章、第八章），卜长江（第九章），高振滨、贾念念（第十章），于涛（第十一章），邱威（第十二章），全书由陈林珠统稿。

本书的初稿曾在哈尔滨工程大学各工科专业学生的高等数学课程的教学过程中试用，受到广大学生的欢迎和好评，在提高教学效果、教学质量及培养学生自学和综合应用能力等各方面都起到了重要作用。

本书在编写及前期使用过程中得到了哈尔滨工程大学应用数学系领导和广大教师的鼓励和协助，得到了全校广大学生的支持和肯定，更得到了全校各级领导的帮助和指导，在此一并表示感谢。

由于水平所限，书中难免存在不妥之处，恳切希望广大读者批评指正。

编　者

2003 年 2 月

目　录

第一部分　微积分辅导

第二部分　《微积分教程》习题选解

第一部分

微积分辅导

第一章　函数、极限与连续

一、基本内容

(一) 函数

1. 函数的定义

设变量 x 在某个实数集 D 中取定一数值时，另一变量 y 按照一定规则总有一确定的数值与其对应，则称 y 是 x 的函数. 记为 $y = f(x)$. 称 x 为自变量，y 为因变量，实数集 D 为定义域.

2. 函数的几种特性

(1) 单调性　设 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加(单增)；反之，若恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少(单减).

(2) 有界性　设 $f(x)$ 在实数域 D 内有定义. 数集 $X \subset D$，若存在正数 M，使得与任一 $x \in X$ 所对应的函数值都满足不等式 $|f(x)| < M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界，否则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

(3) 奇偶性　若 $f(x)$ 的定义域 D 对称于原点，对任意 $x \in D$ 恒成立

$f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

$f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(4) 周期性　设 $f(x)$ 在 D 上有定义，若存在一不为零的数 l 使得对任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$，且 $f(x + l) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数. 通常周期是指最小正周期.

3. 反函数

在函数 $y=f(x)$ 中,若将 y 当作自变量,x 当作因变量,则由 $y=f(x)$ 确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数.

4. 复合函数

若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,$u\in D_1$,而 u 又是 x 的函数,$u=\varphi(x)$,$x\in D_2$,且 $D=\{x|x\in D_2,\varphi(x)\in D_1\}\neq\phi$,则函数 $y=f[\varphi(x)]$,$x\in D$ 称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,称 u 为中间变量.

5. 初等函数

幂函数、指数函数、三角函数以及它们的反函数都称为基本初等函数. 由常数和基本初等函数经有限次四则运算和有限复合步骤所形成的,并且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

(二) 极限

1. 极限的定义

(1) 设数列 x_n 与常数 a 有如下关系:对任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,则称数列 x_n 收敛于 a,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) 对任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,在 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(3) 对任意给定的正数 ε,总存在正数 X,当 $|x|>X$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限为 A,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

2. 极限的四则运算

设 $\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则有 $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;$\lim[f(x)g(x)]=AB$;$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq0)$.

3. 极限存在准则

(1) 单调有界数列必存在极限.

(2) 设 x_n, y_n, z_n 为三个数列($n = 1,2,\cdots$),若 $y_n < z_n < x_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$,则数列 z_n 的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. 此定理称为夹逼定理. 此定理同样适用于函数的极限.

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$;　　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \dfrac{1}{x})^x = \mathrm{e}$.

5. 当 $x \to 0$ 时的等价无穷小量

$\sin x \sim x$; $\tan \sim x$; $\mathrm{th}x \sim x$; $\mathrm{sh}x \sim x$;

$\arcsin x \sim x$; $\arctan x \sim x$; $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$;

$\ln(1 + x) \sim x$; $(1 + x)^2 - 1 \sim 2x$; $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

(三) 连续

1. 函数在一点的连续性

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点连续.

2. 函数的间断点的两种类型

若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点间断,但 $f(x-0)$ 与 $f(x+0)$ 都存在,则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点,否则就称为第二类间断点.

3. 函数的间断点的四种名称

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,但 $f(x_0)$ 不存在或 $f(x_0) \neq A$,则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的可去型间断点.

(2) 设 $f(x_0 - 0)$ 与 $f(x_0 + 0)$ 都存在,但 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$,则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的跳跃型间断点.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$,则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

(4) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 因振荡而不存在,则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的振

荡间断点.

4.初等函数的连续性

设 $f(x)$ 是定义在 I 上的初等函数,则 $f(x)$ 在 I 上连续.

5.闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则有

(1) 最值定理　$f(x)$ 在$[a,b]$上必有最大值和最小值.

(2) 介值定理　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最小值与最大值分别为 m 与 M,c 是介于 m 与 M 之间的任一确定的数,则在(a,b)内至少有一点 ζ,使 $f(\zeta)=c$.

二、典型例题

例 1　求 $f(x)=\arcsin(x^2-x-1)-\sqrt{\ln x}$ 的定义域.

解　为使 $f(x)$ 有意义,应有 $\begin{cases}|x^2-x-1|\leqslant 1\\ \ln x\geqslant 0\end{cases}$,即

$$\begin{cases}x^2-x\geqslant 0\\ x^2-x-2\leqslant 0\\ x\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(x-1)\geqslant 0\\ (x-2)(x+1)\leqslant 0\\ x\geqslant 1\end{cases}$$

由此知 $f(x)$ 的定义域是 $1\leqslant x\leqslant 2$.

例 2　确定 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ 的单调区间.

解　由于 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,因此任取 x_1 及 x_2 且 $x_1<x_2$ 时,x_1 及 x_2 两点应同在$(-\infty,0)$或$(0,+\infty)$内,此时

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=(x_2-\frac{1}{x_2})-(x_1-\frac{1}{x_1})\\&=(x_2-x_1)+(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})\end{aligned}$$

$$= (x_2 - x_1)(1 + \frac{1}{x_1 x_2})$$

显然有 $f(x_2) - f(x_1) > 0$,所以 $f(x)$ 在$(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 内为单增函数.

例 3 判别下列函数的奇偶性.

(1)$f(x) = x\operatorname{sgn}(\sin x)$; (2)$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$.

解 (1) 由于 $\operatorname{sgn}(\sin x) = \begin{cases} -1, & (2k-1)\pi < x < 2k\pi \\ 0, & x = k\pi \\ 1, & 2k\pi < x < (2k+1)\pi \end{cases}$

显然 $\operatorname{sgn}[\sin(-x)] = -\operatorname{sgn}(\sin x)$,为奇函数,而 x 也是奇函数,所以 $f(x) = x\operatorname{sgn}(\sin x)$ 为偶函数.

(2) 由于 $f(-x) = \ln\frac{1-x}{1+x} = -\ln\frac{1+x}{1-x} = -f(x)$,故 $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$ 是奇函数.

例 4 设 $\varphi(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ x, x > 0 \end{cases}$, $\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$,求(1)$\varphi[\varphi(x)]$;(2)$\psi[\psi(x)]$;(3)$\varphi[\psi(x)]$;(4)$\psi[\varphi(x)]$.

解 (1)$\varphi[\varphi(x)] = \begin{cases} 0, & \varphi(x) \leqslant 0 \\ \varphi(x), & \varphi(x) > 0 \end{cases}$

即 $\varphi[\varphi(x)] = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ x, x > 0 \end{cases}$,故 $\varphi[\varphi(x)] = \varphi(x)$.

(2)$\psi[\psi(x)]$ 中由于当 $|x| < \infty$ 时总有 $\psi(x) \leqslant 0$,故 $\psi[\psi(x)] = 0$.

(3)$\varphi[\psi(x)] = 0$(与上题类似).

(4)$\psi[\varphi(x)] = \begin{cases} 0, & \varphi(x) \leqslant 0 \\ -\varphi^2(x), & \varphi(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$

由此知 $\psi[\varphi(x)] = \psi(x)$.

例 5 试用 $\varepsilon - N$ 数列极限的定义,证明以下等式成立:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\dfrac{1}{2}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

证 (1) 由于

$$\left|n-\sqrt{n^2-n}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}-\frac{1}{2}\right|$$

$$=\frac{n}{2(n+\sqrt{n^2-n})^2}\leqslant\frac{n}{2n^2}$$

故为使$\left|n-\sqrt{n^2-n}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$,亦即$\dfrac{n}{2n^2}=\dfrac{1}{2n}<\varepsilon$成立,可取$N=[\dfrac{1}{2\varepsilon}]$,此时有:

对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N=[\dfrac{1}{2\varepsilon}]$,使当 $n>N$ 时,$\left|n-\sqrt{n^2-n}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 成立,即$\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\dfrac{1}{2}$.

(2) 由于$\dfrac{2^n}{n!}=\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{2}{n-1}\cdot\dfrac{2}{n}<\dfrac{4}{n}$

为使$\dfrac{2^n}{n!}<\dfrac{4}{n}<\varepsilon$,只要取 $N=[\dfrac{4}{\varepsilon}]$ 即可.于是有:

对任意给定的 $\varepsilon<0$,存在 $N=[\dfrac{4}{\varepsilon}]$,使当 $n>N$ 时,$\left|\dfrac{2^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$ 成立,即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

例6 试用$\varepsilon-\delta,\varepsilon-X$函数极限的定义证明下列等式成立.

(1) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

证 (1) 由于

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=\left|\frac{x^2+4x+4}{x+2}\right|=|x+2|$$

显然为使$\left|\dfrac{x^2-4}{x+4}-(-4)\right|=|x+2|<\varepsilon$,只要取 $\delta=\varepsilon$ 则有:

对任给的$\varepsilon>0$,存在着$\delta>0$,使满足$0<|x-(-2)|<\delta$的一

切 x，总有 $\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$ 成立，即 $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(2) 为使

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|<\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$$

成立，只需取 $X=\frac{1}{\varepsilon^2}$ 即可，于是有：

对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $X=\frac{1}{\varepsilon^2}$，对 $x>X$ 的一切 x，总有 $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$ 成立，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

例 7 用夹逼定理求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，其中

$$a_n=\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}$$

解 由于

$$\frac{1}{n^3+n}+\frac{4}{n^3+n}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}\leqslant a_n$$

$$\leqslant\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+1}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+1}$$

又由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+n}+\frac{4}{n^3+n}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n)}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+1}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}=\frac{1}{3}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$.

例8 设 $x_1=1, x_2=1+\frac{x_1}{1+x_1}, \cdots, x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 由于 $1\leqslant x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}<2$,即数列有界.又由于

$$x_{n+1}-x_n=(1+\frac{x_n}{1+x_n})-(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}})=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$$

显然分母大于零,于是知 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号,另知 $x_{i+1}-x_i$ 与 $x_i-x_{i-1}(i=2,3,\cdots,n)$ 皆同号.又

$$x_2-x_1=1+\frac{x_1}{1+x_1}-1=\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{1}{2}>0$$

从而知 $x_{n+1}-x_n>0$,即 x_n 为单调递增数列.综上所述可知数列极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,即

$$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=a \Rightarrow 1+\frac{a}{1+a}=a$$

$$\Rightarrow a^2-a-1=0 \Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

可由 $x_n\geqslant 1$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例9 利用四则运算求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[n(\sqrt{n^2+4}-n)]$;

(2) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{4-x^2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{x^2+x-2})$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}[n(\sqrt{n^2+4}-n)] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4}+n} = 2$

(2) 原式 $= \lim\limits_{x\to4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$

$$= \lim_{x\to4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{4}{3}$$

(3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{4-x^2} = \lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{(2-x)(2+x)} = -\frac{5}{4}$

(4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{x^2+x-2}\right) = \lim\limits_{x\to1}\left[\frac{2(x+2)-3(x+1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}\right]$

$$= \lim_{x\to1}\frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$= -\frac{1}{6}$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$

$$= \lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) = 0$$

例 10 利用等价无穷小计算极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{\sin^3 x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x-\frac{e^{2x}}{\sin x}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\arcsin(3x)}{3^x+2^x-6^x-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$.

解 (1) 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right)$$