

# 数学题解辞典

立体几何

SHUXUE  
TITIE  
CIDIAN

上海辞书出版社

# 数学题解辞典

· 立体几何 ·

上海辞书出版社

封面设计：江小铎

**数学题解辞典**

立体几何

唐秀颖 主编

上海辞书出版社出版

(上海陕西北路457号)

上海辞书出版社发行所发行 昆山亭林印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 24.875 插页 5 字数 784000

1991年2月第1版 1991年2月第1次印刷

印数 1—15000

ISBN 7-5326-0105-6/O·7

定价：11元

# 数学题解辞典编辑委员会

顾 问 赵宪初

主 编 唐秀颖

副 主 编 \*夏明德

编辑委员 (按姓氏笔画为序)

陈振宣 郁 楨 顾鸿达 章景翰 曾 容

主要编写人

夏明德 闻焯威 刘继祖 崇安俊 顾鸿达

插 图 朱恩源

责任编辑 唐尚斌

---

注：有\*号者为本书责任编辑

## 前 言

随着科学文化事业的发展,广大中等学校数学教师热切希望有一部以题解为中心的、比较系统的、实用的工具书。鉴于建国三十余年来中学数学教学已经积累了比较丰富的实践经验,各种文献资料也提供了众多的题材,这就有可能在总结我国教学实践经验的基础上,广泛吸收各方面的精华,遵照教育部《全日制六年制重点中学数学教学大纲(草案)》的精神,编纂一部比较符合我国国情、门类比较齐全、查阅比较方便的数学题解辞典。为此,我们邀集上海市部分富有教学经验的数学教师编写了这部工具书。

本辞典分代数、三角、平面几何、立体几何、平面解析几何、初等微积分六卷,主要供中等学校数学教师教学、进修时使用,也可供数学爱好者及中等学校学生参考。

编纂本辞典时,力求贯彻下列要求:

1. 重视提高解题的分析能力。释文着重分析解题思路,揭示解题规律,使读者不仅得到简明而准确的解答,而且学会思考问题的方法。

2. 注重题材的广泛性和代表性。选题时,注意筛选收录中外各类数学题解辞典和各种参考资料中富有启发性的题目,我国高等学校历届入学考试和国内外各种数学竞赛中有代表性的试题,以及中学数学范围内传统的著名题,特别是在教学实践中有助于巩固数学概念、富于思考性的自编题。此外,还酌收少量一般教材中常见的典型题。

3. 注意题材归类,以典型带一般。题目编排分类清楚,条理分明,各类题目选好典型,加以分析说明,使读者举一反三,触类旁通。

由于我们水平有限,虽然努力,但上述编纂要求未必都能达到,选材和释文也可能有疏漏和不当之处,热诚地欢迎读者批评指正。

数学题解辞典编辑委员会

1988年12月

## 凡 例

1. 本书分直线和平面、多面体、旋转体、多面角和正多面体、空间轨迹、空间作图六章，共收录各类立体几何题目九百五十道。正文后附录几何学简史和汉英对照立体几何名词。

2. 题目按学科知识体系的章节分类分组编排。正文前刊有按类组形式编制的详细目录。

3. 在各章开头用双线相隔的部分，是解题或证题所需要的定理、法则、公式等知识提要，按序列出，作为解题的依据。

4. 题目解答一般是一题一解，部分题目有其它较好解法的，则一题多解，分别列出。本书中已收录题目的结论，在其它题目中应用时，一般不再重复，只注明“参见第×××题”。

5. 对典型题或较复杂的题目，以[分析]的形式提示解题的关键和思路的分析；另以[说明]的形式标明有关解题规律的总结和题目意义的推广。在典型题后还配置若干相关的题目，以收触类旁通之效。

6. 本书插图一千九百余幅，分别附于有关题目下面；同一题中有一幅以上者，分别注明图1、图2…。

7. 本书涉及的知识，基本上按照《全日制六年制重点中学数学教学大纲(草案)》的要求；超出大纲要求的知识(在提要中相关序号的左上角用\*号标明)以及部分难度较高的题目，仅供教师参考，不宜作为教学要求。

# 目 录

## 第一章 直线和平面

### § 1. 平面

- (1) 平面的无限延展性(1—10) .....10
- (2) 平面的基本性质(11—26).....17
- (3) 共面问题(27—33).....23
- (4) 应用平面公理的作图(34—39).....28
- (5) 杂题(40—47).....31

### § 2. 空间两条直线

- (1) 空间两条直线的位置(48—54).....37
- (2) 空间多边形(55—74).....42
- (3) 异面直线所成的角(75—85).....58
- (4) 异面直线间的距离(86—98).....69
- (5) 异面直线上两点间的距离(99—103) .....90
- (6) 异面直线综合问题(104—113).....95

### § 3. 空间直线和平面

- (1) 直线和平面平行(114—128)..... 103
- (2) 直线和平面垂直(129—143)..... 113
- (3) 点到直线的距离(144—152)..... 121
- (4) 点到平面的距离(153—160)..... 126
- (5) 直线和平面所成的角(161—175)..... 133
- (6) 直线的射影问题(176—184)..... 148
- (7) 直线和平面所成角的应用(185—191)..... 154

### § 4. 空间两平面

- (1) 平面和平面平行(192—199)..... 160
- (2) 平面和平面垂直(200—213)..... 165



(3) 折面问题(214—221).....	183
(4) 三平面的平行或垂直(222—239).....	193
(5) 二面角的计算问题(240—263).....	208
(6) 二面角的证明问题(264—282).....	230
(7) 射影面积问题(283—296).....	244
(8) 正方体的截面问题(297—311).....	254

## 第二章 多面体

### § 1. 棱柱

(1) 直三棱柱(312—329).....	272
(2) 斜三棱柱(330—336).....	287
(3) 直四棱柱(337—340).....	293
(4) 平行六面体(341—351).....	296
(5) 长方体和正方体(352—372).....	304
(6) 截头棱柱(373—377).....	322
(7) 多棱柱(378—379).....	325

### § 2. 棱锥

(1) 四面体一般问题(380—410).....	327
(2) 四面体的体积(411—424).....	352
(3) 三棱锥(425—454).....	371
(4) 四棱锥(455—477).....	393
(5) 多棱锥(478—490).....	413

### § 3. 棱台

## 第三章 旋转体

### § 1. 圆柱

(1) 圆柱的面积和体积(499—504).....	433
(2) 圆柱的侧面展开图(505—511).....	435
(3) 圆柱的截面(512—516).....	439

(4) 圆柱的内接、外接柱体(517—521)·····	441
(5) 圆柱的内接锥体(522—525)·····	444
(6) 杂题(526—530)·····	447
§ 2. 圆锥	
(1) 圆锥的面积和体积(531—545)·····	451
(2) 圆锥的截面(546—555)·····	459
(3) 圆锥的侧面展开图(556—565)·····	464
(4) 圆锥内(外)接柱体、锥体(566—575)·····	470
(5) 极大、极小问题(576—583)·····	477
(6) 圆台(584—595)·····	483
(7) 其它(596—606)·····	490
§ 3. 球	
(1) 球的一般问题(607—616)·····	501
(2) 球的截面(617—628)·····	507
(3) 球冠、球带、球缺、球台、球扇形(629—647)·····	515
(4) 球与锥、台相切(接)问题(648—690)·····	527
(5) 共球问题(691—695)·····	561
(6) 与球有关的定值问题(696—702)·····	564
(7) 多球问题(703—722)·····	567

## 第四章 多面角和正多面体

§ 1. 多面角	
(1) 三面角的不等量关系问题(723—732)·····	593
(2) 三面角的位置关系(733—738)·····	602
(3) 三面角的度量问题(739—751)·····	605
(4) 其它(752—756)·····	620
§ 2. 正多面体	
(1) 正多面体的一般问题(757—787)·····	623
(2) 正多面体与球(788—795)·····	651
(3) 正多面体的体积(796—804)·····	657

(4) 正多面体的内切球和外接球(805—808).....	664
(5) 正多面体的旋转轴(809—816).....	670
(6) 正多面体的切截(817—824).....	677
(7) 正多面体的展开图(825—831).....	685
(8) 正多面体种数及多面体的其他性质(832—838).....	691
(9) 正多面体的画法及应用问题(839—845).....	697
(10) 欧拉定理及其应用(846—851).....	706

### 第五章 空间轨迹

§ 1. 等距离点的轨迹(852—859).....	711
§ 2. 定距离点的轨迹(860—862).....	715
§ 3. 距离的平方和(差)为定值的点的轨迹(863—866).....	716
§ 4. 距离之比为定比的点的轨迹(867—869).....	718
§ 5. 动线段中点的轨迹(870—873).....	720
§ 6. 分定线段为定比的点的轨迹(874—878).....	724
§ 7. 动点射影的轨迹(879—883).....	727
§ 8. 定角或等角顶点的轨迹(884—887).....	729
§ 9. 其它轨迹问题(888—892).....	732

### 第六章 空间作图

§ 1. 作点(893—901).....	737
§ 2. 作直线(902—918).....	741
§ 3. 作平面、平面图形(919—936).....	751
§ 4. 作几何体(937—945).....	761
§ 5. 最大、最小问题(946—950).....	765

# 第一章 直线和平面

立体几何是研究所有的点不全在同一平面内的空间图形的性质的学科。

平面图形是空间图形的一部分,因此,平面几何的知识,是学习立体几何的基础,立体几何的问题,往往要根据确定平面的条件,转化为平面几何问题来研究,这就是通常所说的“降维”的方法,即将三维空间问题,转化为二维平面的问题来研究。

立体几何推理论证的出发点,是平面的三条公理和三条推论,以及平面几何与立体几何的其它公理、定义及定理。

立体几何的证明方法,同平面几何一样,有直接证法和间接证法,其中与平面几何不同的是较多地应用反证法。

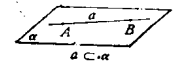
## §1. 平面

### 1. 平面

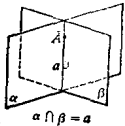
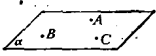
平面是立体几何的基本元素,它是不定义的概念。

同直线相类似,几何里的平面是无限延展的。

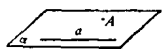
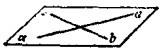
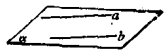
### 2. 平面的基本性质

公理	内 容	用 途	图 形
公理 1	如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内。	判定直线在平面内。	

续表

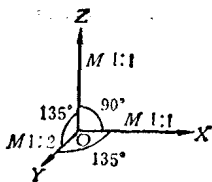
公理	内 容	用 途	图 形
公理 2	如果两个平面有一个公共点, 那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.	判定两个平面相交; 判定点在两个相交平面的交线上.	
公理 3	经过不在同一条直线上的三点, 有且只有一个平面(亦称确定一个平面).	确定一个平面的条件.	

## 3. 确定平面的条件

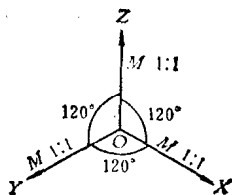
推论	内 容	用 途	图 形
推论 1	经过一条直线和这条直线外的一点, 有且只有一个平面.	确定一个平面的条件.	
推论 2	经过两条相交直线, 有且只有一个平面.	确定一个平面的条件.	
推论 3	经过两条平行直线, 有且只有一个平面.	确定一个平面的条件.	

上述三条, 都是平面公理 3 的推论.

## 4. 空间图形画法依据: 斜二轴测投影法或正等轴测投影法



斜二轴测投影



正等轴测投影

(1) 在直线和平面及多面体中,大都采用斜二轴测投影画法。

(2) 在旋转体中,大都采用正等轴测画法。

## §2. 空间两条直线

### 1. 空间两条直线的位置关系

(1) 相交直线——在同一平面内,有且只有一个公共点;

(2) 平行直线——在同一平面内,没有公共点;

(3) 异面直线——不同在任何一个平面内,没有公共点。

\*本书中凡没有特别说明的两条直线,均指两条不重合的直线。

### 2. 相交直线或平行直线的有关概念和定理

名称	定义(或定理)的内容	图形
等角定理	如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同,那么这两个角相等。	
推论	如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行,那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等。	
三线平行定理	平行于同一条直线的两条直线互相平行。 (又称平行线的传递公理)	

### 3. 异面直线的有关概念和定理

名称	定义(或定理)的内容	图形
异面直线判定定理	平面内一点与平面外一点的连线,和平面内不经过该点的直线是异面直线。	

续表

名称	定义(或定理)的内容	图形
两条异面直线所成的角	过空间一点, 分别作两条异面直线的平行线, 那么这两条直线所成的锐角(或直角), 叫做这两条异面直线所成角。	
两条异面直线互相垂直	两条异面直线所成的角为直角, 那么这两条异面直线互相垂直。	
异面直线的公垂线	和两条异面直线都垂直相交的直线。	
异面直线的距离	两条异面直线的公垂线夹在这两条异面直线间的线段的长。	
(1) 转化为直线与其平行平面的距离	两条异面直线 a, b 的距离, 即 b 与过 a 而平行于 b 的平面的距离 d。	
(2) 转化为分别过两异面直线之一的两个平行平面的距离	两条异面直线 a, b 的距离, 即过 a 而平行 b 的平面与过 b 而平行 a 的平面间的距离。	
异面直线距离的计算	$d = \sqrt{AB^2 - (m^2 + n^2 + 2mn \cos \theta)}$ $(\theta \text{ 为 } a, b \text{ 两异面直线所成角, } d = MN \text{ 为异面直线的距离, } A, B \text{ 为 } a, b \text{ 上两点, } AM = m, BN = n)$	

## §3. 空间直线和平面

## 1. 空间直线和平面的位置关系

(1) 直线在平面内——直线和平面有无数个公共点;

(2) 直线和平面相交——直线和平面有且只有一公共点；

(3) 直线和平面平行——直线和平面没有公共点。

\*本书中凡无特别说明,均指直线不包含于平面内的情况。

## 2. 直线和平面平行的有关概念和定理

名称	定义(或定理)的内容	图形
直线和平面平行的判定定理	如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行,那么这条直线和这个平面平行。	
直线和平面平行的性质定理	如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线就和交线平行。	
直线和平面间的距离	一条直线和一个平面平行,这条直线上任意一点和这个平面的距离叫做直线和平面间的距离。	

## 3. 直线和平面垂直的有关概念和定理

名称	定义(或定理)的内容	图形
直线和平面垂直	一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直,叫做这条直线和这个平面互相垂直。	
直线和平面垂直的判定定理	如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面。	
直线和平面垂直的判定定理	如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面,那么另一条也垂直于同一个平面。	
直线和平面垂直的性质定理	如果两条直线同垂直于一个平面,那么这两条直线平行。	



续表

名称	定义(或定理)的内容	图形
点到平面的距离	从平面外一点引一个平面的垂线, 这点到垂足间的距离, 叫做这点到这个平面的距离.	

## 4. 斜线在平面内的射影及直线和平面所成的角

名称	定义(或定理)的内容	图形
平面的斜线和斜线在平面内的射影	不和平面垂直而又相交的直线, 叫做这个平面的斜线. 斜线上一点向平面引垂线, 过垂足和斜足的直线叫做斜线在这个平面内的射影.	
射影长定理	从平面外一点向平面引垂线段和斜线段中, 射影相等的两条斜线段相等, 射影较长的斜线段也较长; 相等的斜线段的射影相等, 较长的斜线段的射影也较长.	
直线和平面所成的角	平面的一条斜线和它在平面内的射影所成的锐角, 叫做这条斜线和这个平面所成的角. 它是斜线和平面内经过斜足的直线所成的一切角中最小的角.	
三垂线定理	平面内的一条直线, 如果和这个平面的一条斜线垂直, 那么它也和这条斜线垂直.	
三垂线定理的逆定理	平面内的一条直线, 如果和这个平面的一条斜线垂直, 那么它也和这条斜线的射影垂直.	
与一个角的两边等距的点的射影性质	如果一个角所在平面外一点到角的两边距离相等, 那么这点在平面内的射影在这个角的平分线上. (三垂线定理是这一定理的特例)	