计算方法

陶书中　秦　澄　管曙亮　编著

宋方敏　审

21世纪高职高专计算机科学与应用专业系列教材

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

计算方法

21世纪高职高专计算机科学与应用专业系列教材

计 算 方 法

陶书中　秦　澄　管曙亮　编著

宋方敏　审

机械工业出版社

本书介绍了数值计算的基本概念和基本方法，着重讲述工程计算中的常用算法，如误差理论、非线性方程求根、函数插值、数值积分、一阶常微分方程的数值解法、一元函数的极值问题的一维搜索法、数据拟合、线性方程组的解法等内容。每章后都有本章内容小结并附有一定数量的习题。最后一章是计算实习，每一实习均给出该实习的目的与要求、算法概要、用 C 语言编写并在 Turbo C2.0 上调试通过的程序、实例及习题。

本书可作为高等工程专科学校或高职院校计算机专业或其他工科专业学生的教材，也可以作为本科学生或一般工程技术人员的自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

计算方法/陶书中等编著. 一北京：机械工业出版社，2003
（21 世纪高职高专计算机科学与应用专业系列教材）

ISBN 7-111-12636-X

Ⅰ. 计… Ⅱ. 陶… Ⅲ. 工程计算一计算方法一高等学校：技术学校一教材 Ⅳ. 0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 060401 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策　　划：胡毓坚
责任编辑：王　虹
责任印制：路　琳

北京大地印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 7 月第 1 版·第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16·8.75 印张·214 千字
0001－5000 册
定价：14.00 元

21 世纪高职高专计算机
科学与应用专业教材编委会名单

出 版 说 明

新世纪对高职高专教育提出了新的目标和要求，高职高专教育面临新一轮的改革和发展。为了进一步推进高职高专的教育，培养 21 世纪与我国现代化建设相适应的，具有较宽厚的文化基础底蕴，并在生产、管理、服务岗位第一线的技术型应用型人才。机械工业出版社与高职高专计算机科学与应用专业教材编委会联合组织了全国近百所院校的一线骨干教师，在交流、研讨的基础上，根据国家教育部的精神，以及高职高专教学改革的新思路、新突破、新经验、新举措，编写了此套“21 世纪高职高专计算机科学与应用专业系列教材”。目前已出版了 2 轮，近 30 种教材。随着教改的深入，新技术的出现，新一轮的高职高专教材将陆续出版。

第一轮教材更明确高职高专学生培养的定位，更强化学生实践能力和创新意识的培养，更反映现代高等职业技术教育的理念、方法和手段，更注重培养第一线的技术应用型人才。新的教材是将高职高专院校教学改革力度比较大，内容新颖，注重能力，体现创新的教材，或者各院校急需使用，适合社会经济发展新课题的教材列入选题规划，进行修编或新编。力求体现“定位准确、注重能力、内容创新、结构合理和叙述通俗”的编写特色。新教材是由个人申报，经各院校推荐，编委会会同专家评选，出版社立项出版的。

望各高职高专院校积极选用本套系列教材，及时提出修改意见，不断提高教材的编写质量。

高职高专计算机科学与应用专业教材编委会
机械工业出版社

前　言

本教材是根据 21 世纪高职高专计算机科学与应用专业教材编委会拟定的《计算方法》教材编写大纲编写的。

本书介绍了数值计算的基本概念和基本方法，着重讲述工程计算中的常用算法，如误差理论、非线性方程求根、函数插值、数值积分、一阶常微分方程的数值解法、一元函数的极值问题的一维搜索法、数据拟合和线性方程组的解法等内容，与《高等数学》课程相衔接，按 45～60 学时编写。考虑到高职高专教育尤其是高职教育的特点，在内容选择、结构体系等方面努力体现为专业课程和后继课程服务的思想；努力满足加强培养技术应用型人才动手能力的要求，尽量避免烦琐的理论证明和推导。

本书第 1、2、3、7、8 章由陶书中编写，第 4、5、6 章由秦澄编写，第 9 章由管曙亮编写，最后由陶书中统编全书。南京大学计算机系博士生导师宋方敏教授审阅了全部书稿，提出了不少宝贵的意见。在本书编写过程中得到周智文、徐耀生、丁勤等同志和教材编委会的大力支持，在此表示衷心的感谢！限于编者水平，加上时间仓促，书中难免有不妥或错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

高职高专“十五”规划教材系列

计算机数学基础
计算机基础及应用
计算机组装与维护
计算机软件技术基础
数据结构
C 语言程序设计
C++面向对象程序设计
Visual Basic 程序设计
Visual C++程序设计
Java 语言程序设计
软件工程
数据库系统原理及应用
SQL Server 数据库应用系统开发技术
Visual FoxPro 程序设计
计算机图形图像处理技术
多媒体技术及应用
网页设计与制作
平面设计与制作
AutoCAD 基础及应用
计算机常用工具软件
操作系统原理
网络操作系统
网络设计与网站建设
计算机网络技术及应用
计算机常用网络工具软件
局域网组建与管理
网络工程
网络与信息安全
计算机组成原理
微机原理及接口技术
单片机原理及应用
PLC 基础及应用
实用电子技术与仿真
MATLAB 基础及应用

高职高专电子商务专业规划教材

电子商务应用与案例
网络营销基础
电子商务英语
网页设计与制作
Visual Basic 程序设计
SQL Server 2000 网络数据库
电子商务网站建设与实例
电子商务概论
电子商务物流管理
电子商务结算
电子商务实践
国际贸易
网络财务
网络广告设计
连锁配送网络技术
单证务实
市场信息学
网络安全与电子商务
商务谈判和礼仪

中等职业教育国家规划教材（计算机及应用专业）
全国中等职业教育教材审定委员会审定

计算机原理
编程语言基础——C 语言
数据库应用基础——Visual FoxPro
计算机组装与维修
计算机组装与维修实训
计算机网络技术
多媒体技术应用
可视化编程应用
局域网组成实践
Internet 应用

面向21世纪高职高专系列教材

计算机专业

计算机网络技术基础
单片机接口技术及应用
网络数据库技术及应用
软件工程
C语言程序设计
Visual C++语言程序设计
Linux 操作系统
计算机安全与防护技术
ASP 编程基础及应用
动态网页设计与制作
智能大厦与综合布线
信息技术软件基础
Visual FoxPro 程序设计
Visual Basic 程序设计
图形图像处理技术
计算机工具软件使用教程
Internet 实用技术
计算机专业英语
多媒体技术及应用
数据结构
计算机维护与维修
操作系统
局域网组建与安装
网络管理与维护

电子技术专业

电路基础
移动通信技术
家用电器与维修技术
实用电子手册
电子技术专业英语
音像技术
现代通信系统
EDA 技术基础
信号与线性网络基础
电视原理与接收机
电工实训教程
电子工艺实训教程
电子线路综合实训教程
现代通信技术
电机与电气控制
电力电子技术
传感器技术与应用
电子测量实训教程
单片机原理与控制技术

机电专业

术原理与应用
制造技术概论
电路基础与仿真
冷冲压工艺与模具设计
塑料模具设计
机械设计基础
机械制造基础
可编程控制器应用技术
单片机原理及应用
液压与气压传动
电机拖动与控制
电工与电子技术基础
求职与创业
应用文写作实训教程

21世纪高职高专计算机科学与应用专业系列教材

离散数学
综合布线技术
Delphi 程序设计基础
Java 语言基础
电子商务
电子工程制图
微机原理与外围设备
关系数据库与 SQL Server 2000
计算机电路基础
信息管理系统
数据库综合实训
计算方法
多媒体技术实践教程
实用写作与口才
商务英语
现代社交礼仪基础

目　录

第1章　绪　　论

1.1　计算方法的对象与特点

计算方法是研究数学问题的数值解（近似解）及其理论的一个数学分支。它涉及的面很广，如代数、微积分、微分方程等等都有数值解的问题。随着计算机的出现和计算机性能的不断提高，极大地促进了计算方法这门学科在理论和应用上的快速发展。目前，计算机已经成为数值计算的主要工具。计算方法主要研究适合于在计算机上使用的数值计算的方法以及与此相关的理论，包括方法的收敛性、稳定性以及误差分析，还要研究计算时间最短、需要计算机内存最少的计算方法。概括起来，计算方法有如下特点：

1）面向计算机。要根据计算机的特点提供实际可行的算法，即算法只能包括加、减、乘、除运算和逻辑运算，是计算机能够直接处理的。

2）有可靠的理论分析。能任意逼近并达到所要求的精度，对近似算法要保证收敛性和数值稳定性，还要进行误差分析，这些都建立在相应数学理论的基础上。

3）要有好的计算复杂性。时间复杂性好是指节省时间，空间复杂性好是指节省存储量，这也是建立算法时要研究的问题，因为它关系到算法能否在计算机上实现。

4）要有数值实验。即任何一种算法除了从理论上要满足上述三点外，还要通过数值实验证明是行之有效的。

计算方法是以数学问题为研究对象的，它有纯数学的高度抽象性和严格性的特点，又有应用的广泛性和实际试验的高度技术性的特点，是一门与计算机密切结合的实用性很强的课程。

1.2　误差的来源及误差的基本概念

1.2.1　误差的来源

一个物理量的精确值与我们算出的近似值往往不相等，它们之间的差称为**误差**。引起误差的原因很多，主要有以下几点：

（1）从实际问题转化为数学问题，即建立数学模型时，往往要作许多简化，因此数学模型本身就包含了误差，这种数学模型与实际问题之间出现的误差称为**模型误差**。

（2）在数学模型中，往往要包含一些观测数据，而观测得到的数据往往不准确，这种观测值与实际问题之间出现的误差称为**观测误差**。

（3）在计算中常常遇到只有通过无限过程才能得到的结果，但在实际计算时，只能用有限过程来计算。如无穷级数求和，只能取前面有限项求和来近似代替，于是产生了有限过程代替无限过程的误差，称之为**截断误差**。

例如，在工程计算中常常用到的常数$e=2.7182818459045\cdots$，可以通过下面的公式来计算

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

它的精确值是求不出的，只能根据精度要求，计算其足够精确的近似值。如需要计算其前$n+1$项

$$e\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

则产生的截断误差为

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots$$

（4）在计算中遇到的数据可能位数很多，也可能是无穷小数，如$\sqrt{3}$、1/7等，但计算时只能对有限位数进行运算，因而往往四舍五入，这样产生的误差称为**舍入误差**。

少量的舍入误差是微不足道的，但是在计算机中进行了千百万次运算之后，舍入误差的积累有时是十分惊人的。

由以上的分析可以看到：误差是不可避免的，要求绝对准确是没有道理的，也是做不到的。既然描述问题的方法本身都是近似的，要求绝对准确也就不可能的了。因此我们在计算方法里讨论的都是近似解，认为近似解不可靠、不准确的看法是错误的，应该认为求近似解是正常的，问题是我们如何设法减少误差，提高精度。本教材仅讨论截断误差和舍入误差。

1.2.2 绝对误差与绝对误差限

设x为精确值，x^*为x的近似值，我们称

$$|x-x^*| \tag{1-1}$$

为近似值x^*的**绝对误差**。

由于一般无法得到精确值x，因此绝对误差无法直接算出。但是根据具体的观测或计算的情况，可以预先估计其绝对误差的范围

$$|x-x^*|\leqslant\varepsilon$$

ε称为近似值x^*的**绝对误差限**，简称**误差限**。有时也表示为：$x^*-\varepsilon\leqslant x\leqslant x^*+\varepsilon$或用$x=x^*\pm\varepsilon$来表示$x$的精确度。

【例 1-1】 设$x=\sqrt{2}=1.4142\cdots$，若取它的近似值$x^*=1.41$，则

$$|\sqrt{2}-1.41|\leqslant 0.005$$

则0.005是近似值$x^*=1.41$的误差限。

【例 1-2】 用毫米刻度的直尺测量一个长度为x的物体，测得其长度的近似值为$x^*=123\mathrm{mm}$，由于直尺是以毫米为刻度的，所以其误差不超过$0.5\mathrm{mm}$，即

$$|x-123|\leqslant 0.5$$

从这个不等式我们不能得出精确值x，但是却知道x的范围：

$$122.5 \leqslant x \leqslant 123.5$$

则称 0.5 是 $x^* = 123$ 的误差限。

1.2.3 相对误差与相对误差限

误差限的大小有时还不能完全反映误差的程度，例如，用仪器测得某新型子弹的速度的近似值为 $x^* = 1600\text{m/s}$，误差限为 16m/s，约为子弹速度的 1%，显然这个测量结果是相当准确的。又如测量某运动员的奔跑速度为 10m/s，误差限为 1m/s，约为运动员奔跑速度的 1/10，显然这个测量结果是比较差的。但是，运动员奔跑速度的误差限比子弹速度的误差限的数值小得多。因此，为了较好地反映近似值的精确程度，必须考虑绝对误差 $|x - x^*|$ 与精确值 x 的比值

$$\left|\frac{x - x^*}{x}\right| \tag{1-2}$$

称为近似值 x^* 的**相对误差**。在实际计算中，由于精确值 x 是不知道的，所以也把

$$\left|\frac{x - x^*}{x^*}\right|$$

作为近似值 x^* 的相对误差。

同样地，如果

$$\left|\frac{x - x^*}{x^*}\right| \leqslant \varepsilon_r$$

则称 ε_r 为近似值 x^* 的**相对误差**限。因此前面提到的子弹速度近似值 $x^* = 1600\text{m/s}$ 的相对误差限为 0.01，运动员跑速的相对误差限为 0.1。由此可见，相对误差限越小，近似程度就越高。

当精确值 x 有很多位时，常常按四舍五入的原则得到 x 的前几位近似值 x^*。例如

$$x^* = \sqrt{3} = 1.732050808\cdots$$

取前 3 位，　$x_1 = 1.73$　　$|x - x_1| \leqslant 0.003$

取前 4 位，　$x_2 = 1.732$　　$|x - x_2| \leqslant 0.0001$

取前 5 位，　$x_3 = 1.7321$　　$|x - x_3| \leqslant 0.00005$

显然它们的绝对误差限都不超过未位上的半个单位。

1.2.4 有效数字

若近似值 x^* 的绝对误差限是某一位上的半个单位，且该位到 x^* 的左起第一位非零数字共有 n 位，则称 x^* 有 n 位**有效数字**，或者说 x^* 精确到该位。

【例 1-3】　对 $\sqrt{3}$ 的近似值取

$x_1 = 1.73$，则 x_1 有 3 位有效数字；

$x_2 = 1.732$，则 x_2 有 4 位有效数字；

$x_3 = 1.7321$，则 x_3 有 5 位有效数字；

$x_4 = 1.7320$，因为 $|\sqrt{3} - 1.7320| = 0.000050808\cdots \geqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4}$，则 x_4 只有 4 位有效数字

【例 1-4】 对下列各数写出具有 5 位有效数字的近似值

231.456， 0.00132745， 8.000023， 7.000023×10^3

解 根据定义，上述各数具有 5 位有效数字的近似值分别是

231.46， 0.0013275， 8.0000， 7000.0

【例 1-5】 指出下列各数分别是几位有效数字

3.0004， −0.00300， −7034， 0.003， 8000

解 根据定义，上述各数的有效位数分别是：5，3，4，1，1。

一般地，近似数

$$x^* = \pm 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \times 10^m$$

若误差限

$$|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-l} \qquad 1 \leqslant l \leqslant n \tag{1-3}$$

其中 m 为整数，数字 α_1 是 1～9 中某一数字，而 $\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n$ 可分别取 0～9 中某一数字，则说 x^* 有 l 位有效数字。

【例 1-6】 求 $x = 4325.3403$ 的误差限为 $\frac{1}{2} \times 10^{-2}$ 的近似值，并指出它有几位有效数字

解 将 $x = 4325.3403$ 写成标准格式：$x = 0.43253403 \times 10^4$，其误差限表示为

$$|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times 10^{4-6}$$

即 x^* 有 6 位有效数字，所以 $x^* = 4325.34$。

1.3 计算机中数的表示

1.3.1 数的浮点表示

在计算机中通常采用的是二进制实数系统（十六进制是它的变形），并且表示成与十进制类似的规格化形式即浮点形式

$$\pm 2^m \times 0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_t$$

称为机器数。其中，整数 m 称为阶码，用二进制表示为 $m = \pm\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s$，$\alpha_i = 0或1(i = 1,2,\cdots,s)$。$0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_t$ 称为尾数，$\beta_1 = 1, \beta_j = 0或1(j = 2,3,\cdots,t)$。$t$ 是机器数的二进制字长。

1.3.2 机器数系

机器数有单精度和双精度之分。通常情况下单精度为 32 位，双精度为 64 位，它们是正负号、阶码和尾数所占二进制的总长度。t 的值规定了机器数的精度。单精度的 $t = 23$，约为十进制数的 7 位有效数字；双精度的 $t = 52$，约为十进制数的 15 位有效数字。s 的值规定了机器数的绝对值范围。单精度和双精度机器数的绝对值范围分别为 2^{-128} ～ 2^{128} 和 2^{-1024} ～

2^{1024}，即$2.9\times10^{-39}\sim3.4\times10^{38}$和$5.56\times10^{-309}\sim1.79\times10^{308}$。此范围以下的机器数视为零，此范围以上的机器数视为无穷大。

十进制数输入计算机时转换成二进制数，并对 t 位后面的数作舍入处理，使得尾数为 t 位，因此一般有舍入误差。两个十进制数作算术运算时，对计算结果也要作舍入处理，使得尾数为 t 位，因此也有舍入误差。在以后的讨论中，为了适应人们的习惯，采用十进制实数系统进行误差分析。

应该注意的是：用计算机作加减法时，交换律往往不成立，特别是当参加运算的数的数量级相差很大时，计算的结果与运算的次序有很大的关系。其中有些次序得到结果的精度可能比较差，也可能只有某些次序能得到较高的精确度。

【例 1-7】　在 5 位十进制的计算机上计算

$$x=63015+\sum_{i=0}^{1000}\alpha_i \qquad 0.1\leqslant\alpha_i\leqslant0.9$$

计算机作加减法时，先对阶舍入，再加减。现在设$\alpha_i=0.4$。如果用 63015 依次加各个α_i，那么上式用规格化和对阶后的数表示为

$$x=0.63015\times10^5+0.000004\times10^5+\cdots+0.000004\times10^5$$

因为其中0.000004×10^5的舍入结果为 0，所以上式的计算结果为0.63015×10^5。

如果先把 1000 个α_i相加，再和 63015 相加，那么结果是0.63415×10^5。很显然后一种方法得到的结果是正确的，前一种方法的舍入误差影响太大。

1.4　在近似计算中应遵循的一些原则

1.4.1　遵循的法则

在进行近似运算时，应遵循下述法则

1．加减运算

近似数进行加减时，应把其中小数位较多的数四舍五入，使其比小数位数最少的数多一位小数，计算结果四舍五入后保留的小数位数与原近似数中小数位数最少的数的位数相同。

【例 1-8】　设$x=2.618, y=3.20634$，则

$$x+y\approx2.618+3.2063\approx5.824$$
$$x-y\approx2.618-3.20634\approx-0.588$$

2．乘除运算

两个近似数相乘除时，各因子保留的位数应比有效数字位数最少者的位数多一位，所得结果四舍五入后的有效数位数与原近似值中有效数字位数最少者的位数至多少一位。

【例 1-9】　设$x=2.505, y=1.3$，则

$$xy\approx2.50\times1.3\approx3.3$$
$$x/y\approx2.50\div1.3\approx1.9$$

3．乘方与开方运算

近似数在进行乘方或开方运算时，原来近似值有几位有效数字，计算结果四舍五入后仍然保留几位。

【例 1-10】 设 $x=1.6$,则

$$x^2 \approx 2.6; \sqrt{x} \approx 1.3$$

4．对数运算

在进行对数运算时，所取对数的位数应与其真数的有效数字的位数相等。

【例 1-11】 $\lg 2.718 \approx 0.4343$

在实际进行计算过程中，中间的计算结果应比上述各法则所提及的位数多取一位，在进行最后一次计算时这一位要进行四舍五入。另外，如果计算结果是由加减法求得，则原始数据的小数位数应比计算结果所要求的位数多一位；如果计算结果是由乘除法、开方乘方求得，则原始数据的有效数字位数应比计算结果所要求的位数多一位。

1.4.2 近似计算中应注意的问题

为了保证计算结果的高精确度，在设计算法时应尽量避免发生下列几种情况：

1．避免两个十分相近的数相减

在数值计算中，两个十分相近的数相减有时有效数字会损失。

【例 1-12】 设 $x=1000$，取 4 位有效数字，则有

$$\sqrt{x+1}=31.64 \qquad \sqrt{x}=31.62$$

当将两个数直接相减时有：

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=0.02$$

这个结果只有 1 位有效数字，损失了 3 位有效数字，从而会使得绝对误差和相对误差都变得很大，进而严重影响计算结果的精确度。如在实际计算中遇到类似情况，最好改变计算公式，避免这种情况发生。

如果对计算公式作如下改变

$$y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

按照这个公式计算，取 $x=1000$，则 $y=0.01581$，有 4 位有效数字，由此可见，改变计算公式可以避免两个相近数相减引起的有效数字损失，而得到比较精确的结果。

2．避免除数的绝对值远远小于被除数绝对值的除法

用绝对值很小的数作除数，舍入误差会增大，而且当很小的数稍有一点误差时，对计算结果影响很大。

【例 1-13】 $\dfrac{3.1415}{0.001}=3141.5$

如果分母变为 0.0011，即分母只有 0.0001 的误差时

$$\frac{3.1415}{0.0011} \approx 2855.9$$

计算结果却引起了很大的变化。

3．防止大数"吃掉"小数

在数值计算中参加运算的数有时数量级相差很大，而计算机位数有限，如果不注意运算次序，就很有可能出现大数"吃掉"小数的现象，从而影响结果的可靠性。

【例 1-14】 在 5 位十进制的计算机上计算