恩波辅导

"ENBO"21SHIJIKAOSHIFUDAOCONGSHU

供本科生、考研生复习使用

概率论与数理统计复习指导

最新修订版

◎北京大学
姚孟臣/编著
◎恩波/审订

GAILULUN
YU
SHULITONGJI
FUXI
ZHIDAO

ENBO

国家行政学院出版社

《概率论与数理统计》复习指导

姚孟臣 编著

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

《概率论与数理统计》复习指导/姚孟臣编著. —北京：国家行政学院出版社，1999.4

ISBN 7-80140-055-0

Ⅰ.概… Ⅱ.姚… Ⅲ.①概率论-高等教育-学习参考资料 ②数理统计-高等教育-学习参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 10740 号

概率论与数理统计复习指导

姚孟臣 编著

*

国家行政学院出版社出版发行

北京市海淀区厂洼街 11 号

邮政编码：100089

发行部电话：68929037 68929098

新华书店经销

北京英杰印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 开本 8.875 印张 228 千字

2000 年 4 月第 2 版 2000 年 8 月第 1 次印刷

印数：5000 册

ISBN 7-80140-055-0/O·3 定价：12.80 元

前 言

为了适应参加“全国硕士研究生入学考试”考生复习的需要，根据有关的《考试大纲》的要求，我们编写了《“概率论与数理统计”复习指导》一书。

本书共分为三部分。第一部分：基本内容的介绍；第二部分：解题方法的选讲；第三部分：历年试题的选编。

为了使得学生通过一定数量题目的练习，更好地理解和掌握有关的基本概念和基本解题的方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断地增加对考试的适应能力和通过考试的自信心，本书所选的试题打破过去习题集的单一类型，分设了填空题、单项选择题、解答题和证明题等。

本书在编写时考虑到各方面的需要，内容上较为全面。因此，读者在使用本书进行概率论与数理统计复习时，应参照有关的《考试大纲》进行。

本书适合文、理科各个专业，特别是参加全国硕士研究生入学考试及其它各类考试的概率论与数理统计课程的需要。也适合各高等院校各个专业的概率论与数理统计课教学辅导的需要。

为了帮助广大考生能在较短的时间内全面地、系统的复习有关的数学内容，我们根据教育部最近制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关要求，结合我们多年参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验，编制了“《概率论》部分知识网络图”和“《数理统计》部分知识网络图”(分别见附图 1 和附图 2)，供广大考生复习时选用。

本书的编写得到了全国高等教育自学考试指导委员会办公室有关同志的帮助，在此，我们向他们深表谢意。

由于编者水平所限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者于北京大学中关园

目　　录

第一部分　基本内容简介

第一章　随机事件和概率

1.1　基本原理与排列组合

1. 加法原理

定理 1　设完成一件事有 n 类方法，只要选择任何一类中的一种方法，这件事就可以完成. 若第一类方法有 m_1 种，第二类方法有 m_2 种，…，第 n 类方法有 m_n 种，并且这 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法里，任何两种方法都不相同，则完成这件事就有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法.

例 1　由甲地到乙地，有飞机、火车、汽车三种交通工具. 已知飞机每天一班，火车每天两次，汽车每天三趟，问一天中由甲地赴乙地有几种走法?

解　一天中由甲地赴乙地有三种方法：乘飞机、乘火车、乘汽车. 其中乘飞机有一种方法，乘火车有两种方法，乘汽车有三种方法. 由加法原理可知一天中由甲地赴乙地共有

$$1+2+3=6(\text{种方法}).$$

2. 乘法原理

定理 2　设完成一件事有 n 个步骤，第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法，…第 n 步有 m_n 种方法，并且完成这件事必须经过每一步，则完成这件事共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种方法.

例 2　由甲地到乙地有 A,B 两条路线，由乙地到丙地有 C,

D,E 三条路线，问由甲地经乙地赴丙地有几种不同的路线？

解 由甲地经乙地赴丙地可分两步完成，第一步由甲地到乙地，第二步再由乙地到丙地. 因为第一步从甲地至乙地有两条路线可供选择，无论走哪一条路线到乙地后第二步又有三条路线去丙地，由乘法原理可知由甲地经乙地赴丙地的不同的路线共有

$$2 \times 3 = 6(\text{种}).$$

3. 排列

定义 从 n 个不同元素中，每次取出 m 个元素，按照一定顺序排成一列，称为从 n 个元素中每次取出 m 个元素的排列.

定理 3 从 n 个不同元素中，有放回地逐一取出 m 个元素进行排列(简称为可重复排列)，共有 n^m 种不同的排列.

例 3 由 1,2,3 三个数码可以组成多少个不同的两位数？

解 显然这是一个可重复的排列问题. 由定理 3 可知 $n=3,m=2$，所以三个数码可以组成 $n^m=3^2=9$ 个两位数.

例 4 从 10 件产品(其中 2 件次品，8 件正品)中每次取 1 件观测后放回，共取 3 次(以后简称为有放回地取 3 件). 求这 3 件产品中

(1) 恰有 2 件次品的排列数；

(2) 至多有 1 件次品的排列数.

解 (1) 这是一个可重复的排列问题. 由定理 1 及定理 2，可知其排列数为 $3\times2^2\times8=96$；

(2) "至多有 1 件次品"可分为"恰有 1 件次品"与"没有次品"两种情况，由定理 1 及定理 3，可以得到其排列数为 $3\times2\times8^2+8^3=896$.

定理 4 从 n 个不同元素中，无放回地取出 m 个($m\leqslant n$)元素进行排列(简称为选排列)共有

$$n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

种不同的排列. 选排列的种数用 A_n^m(或 P_n^m)表示，即

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},$$

特别地,当 $m=n$ 时的排列(简称为全排列)共有

$$n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

种不同排列. 全排列的种数用 P_n(或 A_n^n)表示,即

$$P_n = n!,$$

并规定 $0!=1$.

例 5 在北京,武汉,广州的民用航空线上需要几种不同的飞机票?

解 由于从每一站到其它两个站都是不同的飞机票,而且往返两站之间的票也不相同,所以这是一个 $n=3,m=2$ 的选排列问题. 因此共有 $A_3^2=3\times2=6$ 种飞机票.

4. 组合

定义 从 n 个不同元素中,每次取出 m 个元素不考虑其先后顺序作为一组,称为从 n 个元素中每次取出 m 个元素的组合.

定理 5 从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合(简称为一般组合)共有

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

种不同的组合. 一般组合的组合种数用 C_n^m(或 $\binom{n}{m}$)表示,即

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

并且规定 $C_n^0=1$. 不难看出

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

例 6 在北京,武汉,广州这条民用航空线上,头等舱座位有几种不同的票价?

解 因为在每两站之间只有一种票价,所以这是一个 $n=3,m=2$ 的组合问题. 因此有

$$C_3^2 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$$

种票价.

组合数的两个性质

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

定理 6 从不同的 k 类元素中,取出 m 个元素.从第 1 类 n_1 个不同元素中取出 m_1 个,从第 2 类 n_2 个不同的元素中取出 m_2 个,…,第 k 类 n_k 个不同的元素中取出 m_k 个,并且 $n_i \geqslant m_i > 0(i=1,2,\cdots,k)$(简称为不同类元素的组合),共有

$$C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \cdots C_{n_k}^{m_k} = \prod_{i=1}^{k} C_{n_i}^{m_i}$$

种不同取法.

例 7 从 3 个电阻,4 个电感,5 个电容中,取出 9 个元件,问其中有 2 个电阻,3 个电感,4 个电容的取法有多少种?

解 这是一个不同类元素的组合问题.由定理 6 知,共有

$$C_3^2 \cdot C_4^3 \cdot C_5^4 = C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_5^1 = 60$$

种取法.

例 8 从 10 件产品(其中 2 件次品,8 件正品)之中任取 3 件,求这 3 件产品中

(1) 恰有 2 件次品的组合数;

(2) 至多有 1 件次品的组合数.

解 (1) 这是一个不同类元素组合问题.由定理 6 可知,其组合数为 $C_2^2 C_8^1 = 8$;

(2) "至多有 1 件次品"可分为"恰有 1 件次品"与"没有次品"两种情况,由定理 1 及定理 6 可以得到其组合数为 $C_2^1 C_8^2 + C_2^0 C_8^3 = 112$.

1.2 样本空间与随机事件

1. 随机现象及其统计规律性

在客观世界中存在着两类不同的现象：确定性现象和随机现象.

在一定条件下，某种结果必定发生或必定不发生的现象称为确定性现象. 这类现象的一个共同点是：事先可以断定其结果.

在一定条件下，具有多种可能发生的结果的现象称为随机现象. 这类现象的一个共同点是：事先不能预言多种可能结果中究竟出现哪一种.

一般来说，随机现象具有两重性：表面上的偶然性与内部蕴含着的必然规律性. 随机现象的偶然性又称为它的随机性. 在一次实验或观察中，结果的不确定性就是随机现象随机性的一面；在相同的条件下进行大量重复实验或观察时呈现出来的规律性是随机现象必然性的一面，称随机现象的必然性为**统计规律性**.

2. 随机试验与随机事件

为了叙述方便，我们把对随机现象进行的一次观测或一次实验统称为它的一个试验. 如果这个试验满足下面的两个条件：

(1) 在相同的条件下可以重复进行；

(2) 试验都有哪些可能的结果是明确的，但每次试验的具体结果在试验前是无法得知的，那么我们就称它是一个**随机试验**，以后简称为**试验**. 一般用字母 E 表示.

在随机试验中，每一个可能出现的不可分解的最简单的结果称为随机试验的**基本事件**或**样本点**，用 ω 表示；而由全体基本事件构成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**，记为 Ω.

例 1　设 E_1 为抛掷一枚匀称的硬币，观察正、反面出现的情况. 记 ω_1 是出现正面，ω_2 是出现反面. 于是 Ω 由两个基本事件 ω_1，ω_2 构成，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

例 2　设 E_2 为掷一粒骰子，观察出现的点数. 记 ω_i 为出现 i 个点($i=1,2,\cdots,6$). 于是有 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$.

例 3　设 E_3 为从 10 件产品(其中 2 件次品，8 件正品)之中任取 3 件，观察其中次品的件数. 记 ω_i 为恰有 i 件次品($i=0,1,2$)，

于是 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\}$.

例 4 设 E_4 为在相同条件下接连不断地向一个目标射击，直到击中目标为止，观察射击次数. 记 ω_i 为射击 i 次($i=1,2,\cdots$)，于是 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

例 5 设 E_5 为某地铁站每隔 5 分钟有一列车通过，乘客对于列车通过该站的时间完全不知道，观察乘客候车的时间. 记乘客的候车时间为 ω. 显然有 $\omega\in[0,5)$，即 $\Omega=[0,5)$.

通过上面的几个例子可以看出，随机试验大体可以分成只有有限个可能结果的(如 E_1,E_2,E_3)；有可列个可能结果的(如 E_4)和有不可列个可能结果的(如 E_5)这样三种情况.

应该说明的是，一个随机试验中样本点个数的确定都是相对试验目的而言的. 另外，一个随机试验的条件有的是人为的，有的是客观存在的(例如地震等). 在后一种情况下，每当试验条件实现时，人们便会观测到一个结果 ω. 虽然我们无法事先准确地说出试验的结果，但是能够指出它出现的范围 Ω. 因此，我们所讨论的随机试验是有着十分广泛的含意的.

例 6 写出下列随机试验的样本空间 Ω：

(1) 同时掷两枚骰子，记录两枚骰子点数之和；

(2) 10 件产品中有 3 件是次品，每次从中取 1 件，取出后不再放回，直到 3 件次品全部取出为止，记录抽取的次数；

(3) 生产某种产品直到得到 10 件正品，记录生产产品的总件数；

(4) 将一尺之棰折成三段，观察各段的长度.

解 (1) $\Omega=\{2,3,\cdots,12\}$；

(2) $\Omega=\{3,4,\cdots,10\}$；

(3) $\Omega=\{10,11,\cdots\}$；

(4) 设 x,y,z 分别表示第一段、第二段、第三段的长度. 有

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}.$$

有了样本空间的概念，我们就可以来描述随机事件了. 所谓**随**

机事件是样本空间 Ω 的一个子集，随机事件简称为**事件**，用字母 A,B,C 等表示. 因此，某个事件 A 发生当且仅当这个子集中的一个样本点 ω 发生，记为 $\omega\in A$.

在例 2 中，$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$，而 E_2 中的一个事件是具有某些特征的样本点组成的集合. 例如，设事件 $A=\{$出现偶数点$\}$，$B=\{$出现的点数大于 4$\}$，$C=\{$出现 3 点$\}$，可见它们都是 Ω 的子集. 显然，如果事件 A 发生，那么子集$\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$中的一个样本点一定发生，反之亦然，故有 $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$；事件 B 发生就是指出现了样本点 ω_5 或 ω_6，否则我们就说事件 B 没有发生，故有 $B=\{\omega_5,\omega_6\}$；类似地有 $C=\{\omega_3\}$. 一般而言，在例 2 中，任一由样本点组成的 Ω 的子集也都是随机事件. 这里需要特别指出的是，我们把样本空间 Ω 也作为一个事件. 因为在每次试验中，必定有 Ω 中的某个样本点发生，即事件 Ω 在每次试验中必定发生，所以 Ω 是一个必定发生的事件. 在每次试验中必定要发生的事件称为**必然事件**，记作 Ω. 在例 2 中$\{$点数小于等于 6$\}$就是一个必然事件. 在例 3 中$\{$至少有一件正品$\}$也是一个必然事件. 任何随机试验的样本空间 Ω 都是必然事件. 类似地，我们把不包含任何样本点的空集$\varnothing$也作为一个事件. 显然它在每次试验中都不发生. 所以$\varnothing$是一个不可能发生的事件. 在每次试验中必定不会发生的事件称为**不可能事件**，记为$\varnothing$. 在例 2 中$\{$点数等于 7$\}$，$\{$点数小于 1$\}$等都是不可能事件. 在例 3 中$\{$不出现正品$\}$也是不可能事件. 我们知道，必然事件 Ω 与不可能事件$\varnothing$都不是随机事件. 因为作为试验的结果，它们都是确定性的，并不具有随机性. 但是为了今后讨论问题方便，我们也将它们当作随机事件来处理.

1.3 事件之间的关系与运算

如果没有特别的说明，下面问题的讨论我们都假定是在同一样本空间 Ω 中进行的.

1. 事件的包含关系与等价关系

设 A,B 为两个事件. 如果 A 中的每一个样本点都属于 B,那么称事件 B **包含**事件 A,或称事件 A 包含于事件 B,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 这就是说,在一次试验中,如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

如果 $A\supset B$ 与 $B\supset A$ 同时成立,那么称事件 A 与事件 B **等价**或**相等**,记为 $A=B$. 这就是说,在一次试验中,等价的两个事件同时发生或同时不发生,因此可以把它们看成是一样的.

2. 事件的并与交

设 A,B 为两个事件. 我们把至少属于 A 或 B 中一个的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的**并**或**和**,记为 $A\cup B$ 或 $A+B$. 这就是说,事件 $A\cup B$ 表示在一次试验中,事件 A 与 B 至少有一个发生.

设 A,B 为两个事件. 我们把同时属于 A 及 B 的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的**交**或**积**,记为 $A\cap B$ 或 $A\cdot B$,有时也简记为 B. 这就是说,事件 $A\cap B$ 表示在一次试验中,事件 A 与 B 同时发生.

上面的两种基本运算可以推广到多个事件的情况.

我们用 $A_1+A_2+\cdots+A_n \xlongequal{\text{def}} \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生;用 $A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n \xlongequal{\text{def}} \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示事件 A_1, $A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

进而用 $A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots \xlongequal{\text{def}} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots\cdots$ 中至少有一个发生;用 $A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n\cdots \xlongequal{\text{def}} \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 A_1,A_2, $\cdots\cdots$同时发生.

例如,在 1.2 例 3 中,记 $A=\{$至少有一件次品$\}$,$B_i=\{$恰有 i 件次品$\}(i=0,1,2)$,则 A 为 B_1 与 B_2 的并,即 $A=B_1+B_2$,而 $A+B_0=\Omega$,$A\cdot B_0=\varnothing$.

又如，在1.2例4中，记$B_i=\{\omega_i\}(i=1,2,\cdots)$，$A=\{$至少射击4次$\}$，则

$$A=\bigcup_{i=4}^{\infty}B_i.$$

3. 事件的互不相容关系与事件的逆

设A,B为两个事件. 如果$A\cdot B=\varnothing$，那么称事件A与B是**互不相容**的(或**互斥**的). 这就是说，在一次试验中事件A与事件B不可能同时发生.

事件的互不相容关系也可以推广到多于两个事件的情形. 即，如果$A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n=\varnothing$，则称事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$是互斥的. 如果$A_i\cdot A_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，这时我们又称$A_1,A_2,\cdots,A_n$是**两两互斥**的. 注意，如果$n$个事件两两互斥，那么这$n$个事件之间一定互斥；反之不真.

对于事件A，我们把不包含在A中的所有样本点构成的集合称为事件A的**逆**(或A的**对立事件**)，记为$\overline{A}$. 这就是说，事件$\overline{A}$表示在一次试验中事件A不发生. 我们规定它是事件的基本运算之一.

在一次试验中，事件A与$\overline{A}$不会同时发生(即$A\cdot\overline{A}=\varnothing$，称它们具有互斥性)，而且$A$与$\overline{A}$至少有一个发生(即$A+\overline{A}=\Omega$，称它们具有完全性). 这就是说，事件$A$与$\overline{A}$满足：

$$\begin{cases}A\cdot\overline{A}=\varnothing,\\ A+\overline{A}=\Omega.\end{cases}$$

根据上面的基本运算定义，不难验证事件之间的运算满足以下的一些规律：

1) $A+B=B+A$(加法交换律)；

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$(加法结合律)；

3) $A+A=A$；

4) $A+\overline{A}=\Omega$；

5) $A+\Omega=\Omega$；

6) $A+\varnothing=A$;

7) $A \cdot B=B \cdot A$(乘法交换律);

8) $(AB)C=A(BC)$(乘法结合律);

9) $A \cdot A=A$;

10) $A \cdot \overline{A}=\varnothing$;

11) $A \cdot \Omega=A$;

12) $A \cdot \varnothing=\varnothing$;

13) $A(B+C)=AB+AC$(分配律);

14) $A+BC=(A+B)(A+C)$(分配律);

15) $\overline{A+B}=\overline{A} \cdot \overline{B}$;

16) $\overline{A \cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$.

有了事件的三种基本运算我们就可以定义事件的其它一些运算.例如,我们称事件 $A\overline{B}$ 为事件 A 与 B 的**差**,记为 $A-B$.可见,事件 $A-B$ 是由包含于 A 而不包含于 B 的所有样本点构成的集合.

例 1 设 A,B,C 是三个随机事件.试用 A,B,C 表示下列各事件:

(1) 恰有 A 发生;

(2) A 和 B 都发生而 C 不发生;

(3) 所有这三个事件都发生;

(4) A,B,C 至少有一个发生;

(5) 至少有两个事件发生;

(6) 恰有一个事件发生;

(7) 恰有两个事件发生;

(8) 不多于一个事件发生;

(9) 不多于两个事件发生;

(10) 三个事件都不发生.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$;(2) $AB\overline{C}$;(3) ABC;(4) $A+B+C$;

(5) $AB+BC+CA$;(6) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$;