高等学校计算机专业规划教材

离散数学

邵志清　虞慧群　编著

电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高等学校计算机专业规划教材

离散数学

邵志清　虞慧群　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

本书是新世纪高等学校计算机专业规划教材之一。

本书由 7 章组成，内容主要包括：集合、函数、矩阵、关系、命题逻辑、谓词逻辑、代数系统、无向图、有向图和树，另有附录。

为了更多地从计算机科学的角度阐述各类离散结构的概念，本书在定义的描述、例题的选择、定理证明的组织、习题的安排等方面都做了精心的考虑，使读者既能够掌握严格的数学概念，又能够方便地找到这些概念在计算机领域的应用。书中的很多例题和习题具有启发性，可以提高读者分析问题和解决问题的能力，大量附注包含了一些需要深入思考的问题和有关科学家的介绍，富有趣味性。另外，附录中还提供了模拟试题及其参考答案，供读者学习后自我测试。

本书可作为高等院校计算机和其他相关专业的教科书和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/邵志清，虞慧群编著．—北京：电子工业出版社，2003.9
高等学校计算机专业规划教材
ISBN 7-5053-9006-6

Ⅰ．离…　Ⅱ．①邵…②虞…　Ⅲ．离散数学—高等学校—教材　Ⅳ．0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 070527 号

责任编辑：陈晓莉　特约编辑：李双庆
印　　刷：北京大中印刷厂
出版发行：电子工业出版社　http://www.phei.com.cn
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×1 092　1/16　印张：15.25　字数：547 千字
版　　次：2003 年 9 月第 1 版　2003 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：5 000 册　　定价：22.00 元

《高等学校计算机专业规划教材》

编委会名单

出版说明

为了适应我国21世纪计算机各类人才的需要，根据计算机学科技术发展的总趋势，结合我国高等学校教育工作的现状，立足培养的学生能跟上国际计算机学科技术发展水平，原“全国高校计算机专业教学指导委员会”、“中国计算机学会教育委员会”的大部分专家、教授于2001年4月在上海召开研讨会，参照IEEE和ACM计算机教程2001大纲组织编写与其配套的22种教材，现推荐给国内的院校，作为教学之用。

为了使这套教材体现现代计算机教学的特点，编出特色，来自上海交通大学、复旦大学、国防科技大学、哈尔滨工业大学、华东师范大学、东南大学、华东理工大学、上海大学、福州大学、重庆大学、东华大学等十几所大学的专家、教授成立了以陈火旺院士为主任委员的编写委员会，并多次集中开会，深入讨论了结合我国高等学校计算机本科教育的实际而推出的“93教程”的教学情况，以及由全国高校计算机专业教学指导委员会、中国计算机学会教育委员会提出的《2000计算机学科教学计划》征求意见稿，在研究、学习、借鉴2000年6月ACM和IEEE/CS联合专题组发表的“Computing curricula 2001”报告的基础上，结合当前计算机技术飞速发展的现实——对计算机学科的教学内容不断提出更新的要求，特别是为了全面推进素质教育，以及培养学生的创新精神和实践能力，提出了新的编写思路，使这套教材的知识点能反映当前计算机学科技术发展的前沿和趋势。

ACM和IEEE 2001教程的思想是将计算机学科领域的知识分解为几个主要的核心科目（算法与数据结构、计算机体系结构、人工智能与机器人学、数据学与信息检索、人机通信、数值计算、操作系统、程序设计语言、图形学、可视化、多媒体、网络计算、软件工程）并作为学科的公共要求；对计算机学科的教学要突出理论、抽象和设计三个环节，并强调教学一定要与社会需求相结合。另外，还提出了贯穿于计算机学科中常出现的基本概念，并将这些概念在教材中予以清晰的介绍，灵活的应用，以更好地帮助学生，使之成为一个优秀的计算机工作者。

为了保证这套教材的审编和出版质量，以陈火旺院士为主任委员的教材编委会的专家教授们在2001年4月召开了全体编委、作者讨论会，制订了编写要求和编审程序。编委们对所有教材的编写提纲进行了讨论，对教材的质量做了专门的要求，并设立专门的负责人选。参加这套教材的编审者都是来自全国重点高校、在计算机领域从事教学和科研的专家和学者，他们具有丰富的教学经验，严谨的治学态度，较高的学术水平。

这套教材的出版得到电子工业出版社的积极支持。他们把这套教材列为重点图书出版，并制定了专门的编审出版规定和出版流程，组织了专门的编辑力量和协调机构。

我们希望这套教材的出版，对我国的计算机教育事业的发展做出应有的贡献。

编委会

2003年1月

前　　言

众所周知，离散数学是计算机专业的一门非常重要的基础课程。由于离散数学主要讨论具有离散特征的变量和结构，研究它们之间的相互关系，所以可以用来描述计算机科学中的很多概念、结构、算法和系统，例如软件的功能和性能刻画、数字电路结构、网络协议标准、算法复杂性分析、程序设计方法、数据库设计、分布式系统、定理机器证明、并行处理技术等等。事实上，几乎所有大学的计算机专业的教学计划都将离散数学列为核心课程进行重点建设，把它作为其他骨干课程（如数据结构、操作系统、编译原理、数据库应用、计算机网络、软件工程、多媒体技术、人工智能等）的先修课程。同时，许多大学又将离散数学作为计算机专业类研究生入学考试的内容。

然而，离散数学课程的教学现状并不令人感到满意，不少学生对这门课程产生厌学情绪，错误地认为离散数学对计算机的硬件和软件系统的设计与开发没有直接的指导作用。产生这种情况的原因有很多，但教材内容脱离计算机学科特点是其中的一个重要因素。不少教材在离散数学和计算机科学之间明显缺少一种有机联系，内容的陈述仅以纯数学的方式进行，在概念的背景和举例等方面缺乏有关计算机应用的介绍，学生无法从这些概念和性质中看出离散数学对计算机科学所起的关键作用。

本书试图对改变上述状况做一些尝试，在定义的描述、例题的选择、定理证明的组织、习题的安排等方面都作了精心的考虑，力求更多地从计算机学科的角度阐述各类离散结构的概念，在举例说明和背景介绍时尽量结合当前计算机学科发展的最新技术动态，使读者在准确地掌握数学概念的同时，也能够方便地找到这些概念在计算机领域中的应用。

本书内容包括集合、函数、矩阵、关系、命题逻辑、谓词逻辑、代数系统、无向图、有向图、树等，所提供的例题和习题具有启发性，可以提高读者分析问题和解决问题的能力，大量附注包含了一些需要深入思考的问题。为了帮助读者学习本书后进行自我测试，附录中还设计了一套有相当难度的模拟试卷并给出了参考答案。此外，书中还简要介绍了一些数学家和计算机科学家的生平，富有趣味性，读者可以了解这些科学家的研究生涯和工作态度。

本书第 1 章至第 4 章由邵志清撰写，第 5 章至第 7 章由虞慧群撰写，全书由两人共同修改和定稿。在写作过程中，作者得到了很多人的热情帮助和支持，宋国新教授对本书的内容安排提出了宝贵的意见和建议，一直关心本书的进展情况，丁志义副教授、刘东林老师、孙桂利老师等阅读了全部书稿，也提出了很多建设性意见，作者在此表示衷心的感谢。作者特别感谢本书责任编辑陈晓莉副编审，在本书开始写作后不久，两个作者分别应邀到美国纽约州和佛罗里达州进行合作研究，写作进程不得不放缓，令人感动的是，陈编审对此表示出了足够的耐心和宽容，不断与作者通过电子邮件联系，促使本书早日完成。最后，作者也深深感谢他们各自的家庭，没有家庭的大力支持，作者很难集中精力完成本书的写作任务。

限于作者水平，书中错误和疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指正。

邵志清　虞慧群

2003 年 4 月于上海

目　　录

第 1 章　集合、函数和矩阵

本章介绍离散数学的基础知识，包括集合、函数和矩阵等内容。集合理论由康托[①]奠定基础，起源于分析数学中数集的研究，经过两个多世纪的发展，集合论已成为现代数学的基石，并在数学和计算机科学等领域中得到了广泛的应用。函数的概念在离散数学中至关重要，可以用于定义诸如序列和串之类的离散结构，也常用来表示求解一个问题所需要的时间和空间度量。递归函数是程序设计过程中最常见的函数类型。矩阵在计算机科学与工程中具有重要作用，可以用于表示集合中元素之间的各种关系、图的邻接点和邻接边等。

1.1　集合

本节讨论集合的基本概念、表示方法、运算及其性质。

1.1.1　集合的概念和表示

我们把集合作为不可定义的最基本概念。通常，一些对象组成的一个整体就是一个集合。这些对象就是集合的元素或成员。

例题 1.1　以下对象构成的整体都是集合：

(1) 2010 年 9 月 10 日零点时因特网上的所有网站；

(2) 全体奇素数；

(3) 英文字母表中的元音字母；

(4) $'a'$，上海动物园，5。

我们一般用大写的斜体英文字母 A,B,C 等来标识集合，一个特定的集合则用固定的大写黑体英文字母表示。例如，$\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{R}$ 分别表示由自然数$(0,1,2,\cdots)$组成的集合、由整数$(\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots)$组成的集合和由实数组成的集合。不含任何元素的集合称为空集，用符号$\{\ \}$或$\varnothing$表示。当一个对象 a 是集合 A 的元素时，我们记为 $a\in A$，读为“a 属于 A”。反之，则记为 $a\notin A$，读为“a 不属于 A”。常见的集合表示法有以下三种。

1. 枚举法

将组成集合的所有元素全部列举出来，在上下文意义明显的情况下，有穷或无穷多个元素之间也可用省略号表示。元素之间用“,”分隔，最外层用花括号“{”和“}”括住。例如，

(1) $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$；

(2) $A=\{a,e,i,o,u\}$；

(3) $B=\{1,3,5,\cdots,99\}$；

(4) $C=\{1,2,2,1,a,$张三$,$www.eastday.com$,\{3\}\}$。

---

① 康托(Georg Cantor，1845—1918)，德国数学家，集合论创始人，引入集合的基数和超限序数等概念。

2. 描述法

通过刻画元素之间的性质来界定集合的成员。通常，由满足性质 $P(x)$ 的所有元素组成的集合可记为$\{x \mid P(x)\}$。例如：

(1) $\mathbf{R} = \{x \mid x$ 是实数$\}$；

(2) $A = \{x \mid x \in \mathbf{R}$ 并且 $x^2 - 5 = 0\}$；

(3) $B = \{x \mid x$ 是偶数并且 $5 < x < 301\}$。

集合表示的描述法由康托于 1895 年首次提出。值得指出的是，虽然人们经常不加限制地使用这种表示法，但在历史上集合的描述法曾引起过巨大的轰动。罗素[①]于 1902 年发现：从这个直观的集合定义方式出发可以推导出荒谬的结果 —— 悖论，并由此爆发了第三次数学危机。为了从这个危机中解脱出来，蔡梅罗[②]等逻辑学家提出了公理集合论，以区别传统的朴素集合论。罗素悖论的构造非常简单：令

$$A = \{x \mid x \notin x\}$$

则 $A \in A$ 当且仅当$A \notin A$。本书不准备展开对公理集合论的深入讨论，仍以朴素集合论为主。但考虑到体系上的严格性，特作如下规定：我们讨论的对象都来自于某个已给定的集合 U，称为全集。全集可以因讨论场合而不同。这样，原来的集合描述$\{x \mid P(x)\}$ 自动视为$\{x \mid x \in U$ 且 $P(x)\}$。至今，这种规定尚未导致悖论的出现。

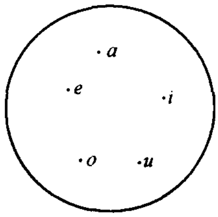

图 1.1　集合$\{a, e, i, o, u\}$

3. 图示法

集合还可以用文恩[③]图表示，特别用矩形表示全集 U，用圆或其他图形表示其他的一般集合。有时还用点表示特定的元素。文恩图也常用于表示集合之间的关系和运算。例如，左边的文恩图(图 1.1) 表示了集合$\{a, e, i, o, u\}$。

1.1.2　集合之间的关系

两个集合之间的常见关系有子集关系和相等关系。

定义 1.1　当集合 A 的每个元素都是集合B 的成员时，称 A 是B 的子集，记为 $A \subseteq B$，读为"A 包含于B" 或"B 包含A"。$A \subseteq B$ 可用下面的文恩图(图 1.2) 表示。

例题 1.2　(1) $\{1,3,5\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$；

(2) $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$。

定理 1.1　对于任何集合 A，

---

① 罗素(Bertrand Russell，1872—1970)，英国数学家、逻辑学家、哲学家，是数理逻辑中逻辑主义学派的主要代表，提出了类演算、类型理论和摹状词理论，建立了命题演算和谓词演算的完整体系，标志了数理逻辑的成熟；罗素悖论的发现导致了对数学基础的研究；主要著作有《数学原理》(与导师怀特海[Alfred North Whitehead，1861—1947，英国数学家、逻辑学家、哲学家] 合著)、《哲学问题》、《心的分析》、《物的分析》等；1950 年获得诺贝尔文学奖。

② 蔡梅罗(Eernst Zermelo，1870—1953)，德国逻辑学家，与另一位德国逻辑学家弗兰克尔(Adolf Fraenkel，1891—1965) 共同提出了公理集合论系统 ZF。

③ 文恩(John Venn，1834—1923)，英国数学家、逻辑学家，主要著作有《符号逻辑》、《或然逻辑》、《实验逻辑原理》等。

(1) $A \subseteq A$;

(2) $A \subseteq U$;

(3) $\varnothing \subseteq A$。

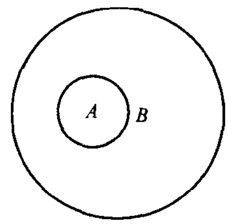

图 1.2　A 是 B 的子集

证明:(1),(2) 显然成立。(3) 用反证法。假设 $\varnothing \subseteq A$ 不成立,则有某个 $\varnothing$ 中元素 x 不在 A 中,即 $x \in \varnothing$ 并且 $x \notin A$。但空集中不包含任何元素,所以 $x \in \varnothing$ 不成立,从而形成矛盾,这说明假设不成立,因此 $\varnothing \subseteq A$ 成立。

我们也可以用直接证明法证明上面的(3)。证明目标是:对任何 x,若 $x \in \varnothing$,则 $x \in A$。由于前提 $x \in \varnothing$ 不成立,所以整个蕴含式(即 $x \in \varnothing$ 推出 $x \in A$)自动成立。这里采用了实质蕴含的推理手段,可参见有关命题逻辑的论述。

设集合 A 是集合 B 的子集。当特别强调 $A \neq B$ 时,我们称 A 是 B 的真子集,记为 $A \subset B$,读作"A 真包含于 B"或"B 真包含 A"。

例题 1.3　(1) $\{1,2\} \subset \{x \mid x \in \mathbf{N}$ 且 $x < 57\}$;

(2) $\{A\} \subset \{A, \{A\}\}$。

到现在为止,我们对集合中元素的出现次数和顺序没有做特别的限制。一个元素可以在某个集合中出现多次,我们称这种集合为多重集,其他的集合称为单重集。例如,$\{b,a,a,b,b\}$ 即是一个多重集,其中 a 出现 2 次,b 出现 3 次;另一方面,$\{a,b\}$ 和 $\{b,a\}$ 中元素 a 和 b 出现顺序不同。但上述三个集合均由 a 和 b 组成,那么一个自然的问题是:它们是否相等?要回答这个问题,必须给出判断两个集合是否相等的标准。我们采用集合外延而不是内涵来衡量它们的相等性:若两个集合的外延相等,则认为这两个集合相等。这个原则可以用下列外延公理描述。

外延公理:若对任何元素 x,$x \in A$ 当且仅当 $x \in B$,则 $A = B$。

例题 1.4　下列等式成立:

$$\begin{aligned}\{b,a,a,b,b,a\} &= \{b,a,b,a\} \\ &= \{a,b\} \\ &= \{b,a\}\end{aligned}$$

显然,对任何一个多重集,都存在惟一的与之相等的单重集,其构造方法非常简单:删除所有冗余出现的元素。给定一个集合 A,A 的基数是指 A 中元素的个数(注意:对多重集而言,一个元素可以出现多次,但计算元素个数时只算一个),记为 $|A|$。当 $|A|$ 无穷时,称 A 为无穷集(如 $\mathbf{N}$);否则,称之为有穷集(如 $\{a,b\}$)。很明显:当 A 是恰好由 n 个不同的元素组成的有穷集时,$|A| = n$。而当 A 为有穷多重集时,$|A| = |A'|$,其中 A' 是与之相等的单重集。以下除非特别声明,一般不考虑多重集。我们约定:$|\varnothing| = 0$。

例题 1.5　(1) 设 $A = \{x \mid x$ 是素数且 $x < 10\}$,则 $|A| = |\{2,3,5,7\}| = 4$;

(2) 设 $A = \{2,3,2,2,5,3\}$,则 $|A| = |\{2,3,5\}| = 3$。

集合之间的相等关系可以用集合之间的子集关系来刻划。

定理 1.2　$A = B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

证明:(1) 若 $A = B$,则由定义知,$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

(2) 设 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。对任何 x,若 $x \in A$,则由 $A \subseteq B$ 知,$x \in B$。同理,若 $x \in B$,则由 $B \subseteq A$ 知,$x \in A$。所以,$x \in A$ 当且仅当 $x \in B$。

由外延公理得,$A = B$。

1.1.3 集合的运算

本节先介绍最常见的四种集合运算：并、交、差、补，然后给出它们的基本性质，最后介绍求集合的幂和卡氏积。

1. 并

定义 1.2 设 A 和 B 是集合，A 和 B 的并集定义为由 A 中或 B 中的元素组成的集合，记为 $A \cup B$。

显然，$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$，可用下列文恩图(图 1.3) 所示。

例题 1.6 (1) $\{1,3,5\} \cup \{1,2,3\} = \{2,3,1,5\}$；

(2) $\{O,R\} \cup \{U,K\} = \{R,U,O,K\}$。

2. 交

定义 1.3 设 A 和 B 是集合，A 和 B 的交集定义为由同时在 A 中和 B 中的元素组成的集合，记为 $A \cap B$。

显然，$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$，可用下列文恩图(图 1.4) 表示。

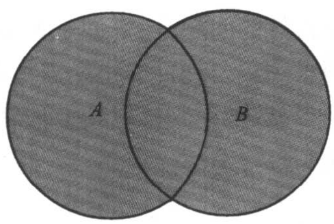

图 1.3 集合 A 和 B 的并

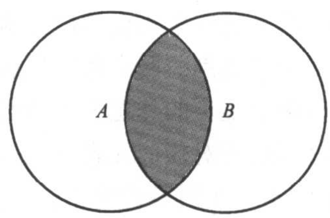

图 1.4 集合 A 和 B 的交

例题 1.7 (1) $\{x \mid x$ 为读计算机专业的本科生$\} \cap \{x \mid x$ 为读数学专业的本科生$\}$
$= \{x \mid x$ 为既读计算机专业又读数学专业的双学位本科生$\}$；

(2) $\{M,I,T\} \cap \{E,C,U,S,T\} = \{T\}$。

定义 1.4 若集合 A 和集合 B 的交为空，则称 A 和 B 不相交。

从文恩图可以看出，$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$。

3. 差

定义 1.5 设 A 和 B 是集合，A 和 B 的差集定义为由在 A 中但不在 B 中出现的元素组成的集合，记为 $A - B$。

显然，$A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$，可用下列文恩图(图 1.5) 表示。

例题 1.8 (1) $\{1,3,5\} - \{1,2,3\} = \{5\}$；

(2) $\{C,O,M,P,U,T,E,R\} - \{A,C,M\} = \{R,O,U,T,E,P\}$。

4. 补

定义 1.6 设 U 是全集，集合 A 的补集定义为 $U - A$，记为 $\overline{A}$。

显然，$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$，可用下列文恩图(图 1.6) 表示。

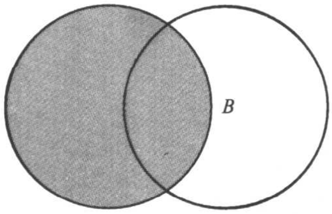

图 1.5　集合 A 和 B 的差

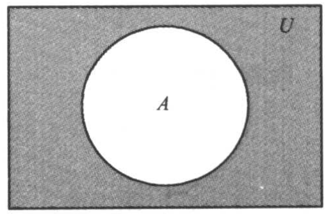

图 1.6　集合 A 的补

例题 1.9　(1) 设 U 是由全体阿拉伯数字符号组成的集合(即 $U = \{'0','1','2',\cdots,'9'\}$)，$A = \{'0','1','3','4','7','8'\}$)，则

$$\overline{A} = \{'2','5','6','9'\}$$

(2) 设 U 为素数集合，A 为奇素数集合，则

$$\overline{A} = \{2\}$$

集合并、交、差、补等运算有许多良好的性质，有些集合恒等式冠以专门的名称，有些集合性质则用于刻画集合之间的关系。由于下面定理的证明都比较简单，我们只证明其中一部分结论，其余的留作习题。

定理 1.3　**集合运算定律**：对任何集合 A,B,C，有

(1) 交换律

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

(2) 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(3) 等幂律

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

(4) 分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(5) 同一律

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap U = A$$

(6) 零律

$$A \cup U = U$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

(7) 吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

(8) 双重否定律

$$\overline{\overline{A}} = A$$

(9) 补全律

$$A \cup \overline{A} = U$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

(10) 德·摩根[①]律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

证明:只选择德·摩根律中的$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$加以证明。

对任何 x,若 $x \in \overline{A \cup B}$,则 $x \notin A \cup B$,从而 $x \notin A$ 并且 $x \notin B$。这样,$x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$。因此,$x \in \overline{A} \cap \overline{B}$。这就证明了$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$。

另一方面,对任何 x,若 $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$,则 $x \in \overline{A}$ 且$x \in \overline{B}$。这样 $x \notin A$ 并且 $x \notin B$,因此 $x \notin A \cup B$,即 $x \in \overline{A \cup B}$。这就证明了 $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$。

综上所述,$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$。

定理 1.4 对任何集合 A 和B,有

(1) $A - B = A \cap \overline{B}$;

(2) $A - B = A - (A \cap B)$;

(3) $A \cup B = (A - B) \cup B$。

证明:以(1) 为例。显然,

$$\begin{aligned} x \in A - B &\Leftrightarrow x \in A, x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A, x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B} \end{aligned}$$

故 $A - B = A \cap \overline{B}$。

定理 1.5 对任何集合 A 和B,有

(1) $A \subseteq A \cup B$;

(2) $A \cap B \subseteq A$;

(3) $A - B \subseteq A$;

(4) $A \subseteq B$ 当且仅当$A \cup B = B$;

(5) $A \subseteq B$ 当且仅当$A \cap B = A$;

(6) $A \subseteq B$ 当且仅当$A - B = \varnothing$;

(7) $A \subseteq B$ 当且仅当$A \cup (B - A) = B$;

(8) $A \subseteq B$ 当且仅当$\overline{B} \subseteq \overline{A}$。

证明:以(6) 为例。显然,

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow \text{对任何 } x \in A, x \in B \\ &\Leftrightarrow \text{不存在 } x, x \in A, \text{但 } x \notin B \\ &\Leftrightarrow \text{不存在 } x, x \in A - B \\ &\Leftrightarrow A - B = \varnothing \end{aligned}$$

故 $A \subseteq B$ 当且仅当$A - B = \varnothing$。

---

① 德·摩根(Augustus De Morgan,1806—1876),英国数学家、逻辑学家,首先研究关系逻辑,提出论域的概念和德·摩根律,主要著作有《形式逻辑》。

5．广义并和广义交

两个集合之间的并和交运算可以推广到任何多个集合上。为此，我们假定 I 是一个非空指标集，用于一组集合的索引。

定义 1.7 设 I 是指标集，$\mathscr{A}$是一个由 I 索引的集簇$\{A_i \mid i \in I\}$，$\mathscr{A}$的并集定义为$\{x \mid$ 有 $i \in I$，使 $x \in A_i\}$，记为 $\bigcup \mathscr{A}$或

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

特别地，当 $I = \{1,\cdots,n\}$ 时，我们记为 $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ 或

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

并称之为 $A_1,\cdots,A_n$ 的并集。

定义 1.8 设 I 是指标集，$\mathscr{A}$是一个由 I 索引的集簇$\{A_i \mid i \in I\}$，$\mathscr{A}$的交集定义为$\{x \mid$ 对所有 $i \in I$，都有 $x \in A_i\}$，记为 $\bigcap \mathscr{A}$或

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

特别地，当 $I = \{1,\cdots,n\}$ 时，我们记为 $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ 或

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

并称之为 $A_1,\cdots,A_n$ 的交集。

显然，

$$\bigcup \{A_1,A_2\} = \bigcup \{A_i \mid i \in \{1,2\}\} = A_1 \cup A_2,$$
$$\bigcap \{A_1,A_2\} = \bigcap \{A_i \mid i \in \{1,2\}\} = A_1 \cap A_2。$$

例题 1.10 设 $A_i = \{i, i+1, i+2,\cdots\}$，$i = 1,2,\cdots$，则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \cdots\} = \{1,2,3,\cdots\}$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \cdots\} = \{n, n+1, \cdots\}$$

设 $A, A_i (i \in I)$ 是一组集合，则类似于集合运算定律中的分配律，我们有

$$A \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$$
$$A \cup \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$$

6．幂

许多问题的求解涉及一个集合中的所有元素的组合可能性，这种组合可以用集合的幂集来考察。

定义 1.9 设 A 是集合，A 的幂集定义为由所有 A 的子集构成的集合，记为$\mathscr{P}(A)$，即

$$\mathscr{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

例题 1.11 (1) $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$；

(2) $\mathscr{P}(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$；

(3) $\mathscr{P}(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$；